

3

Erklärung

aller

in einaxigen Krystallplatten zwischen geradlinig polarisirtem
Lichte wahrnehmbaren

Interferenz-Erscheinungen

in mathematischer Form mitgetheilt

von

Dr. G. S. Ohm.

Mit 1 Tafel.

Erste Hälfte,

worin die in einer einzigen Krystallplatte entstehenden Erscheinungen betrachtet werden.

S. 49-56 fehlen!

Erklärung

aller

in einseitigen Kristallplatten zwischen geradlinig polarisirenden
Lichte wahrnehmbaren

Interferenz-Erscheinungen

in mathematischer Form mitgetheilt

von

Dr. G. S. Osm.

Mit 1 Tafel.

Erste Hälfte.

Wenn die in einer einseitigen Kristallplatte entstehenden Erscheinungen betrachtet werden.

E r k l ä r u n g

aller
in einaxigen Krystallplatten zwischen geradlinig polarisirtem Lichte
wahrnehmbaren

I n t e r f e r e n z - E r s c h e i n u n g e n

in mathematischer Form mitgetheilt

von

Dr. G. S. Ohm.

Meine im Sommersemester 1851 an hiesiger Universität gehaltene Vorlesung über Optik legte mir die Verpflichtung auf, den dahin gehörigen Apparat zu diesem Zwecke zu ordnen und zu vervollständigen. Bei dieser Gelegenheit stiess ich auf eine Interferenzerscheinung in Krystallplatten, die mich anfangs in Erstaunen setzte, weil mir nicht bekannt war, dass sie je in den Bereich der Experimentalphysik gezogen worden wäre. Nimmt man nämlich zwei gleich dicke Platten mit parallelen Oberflächen, welche aus einem einaxigen Krystalle so herausgeschnitten worden sind, dass deren optische Axe einen Winkel von 45° mit ihren Oberflächen bildet, welche Platten bekanntlich einzeln im homogenen Lichte geradlinige, helle und dunkle Streifen von der Farbe des benützten Lichtes, und gekreuzt über einander gelegt schon im gewöhnlichen Tageslichte geradlinige, prismatisch gefärbte Abwechselungen sehen lassen, die denen sehr ähnlich sind, welche der gewöhnliche Interferenzversuch an den Fresnel'schen Spiegeln oder an zwei, auf die von mir in Poggendorff's Annalen (XLIX. pag. 98) beschriebene Weise zubereiteten

Spiegelglasstücken *) liefert, — und legt man diese beiden Platten so übereinander, dass deren *Hauptnormalebenen*, (so wollen wir die Ebenen

*) In Bezug auf diese letztere äusserst einfache und im Gebrauch so sehr bequeme Vorrichtung benütze ich diese Gelegenheit, einen Umstand zu berichtigen, der ihrer weitem Verbreitung mit um so grössern Erfolg entgegen zu treten im Stande ist, als eine Stelle in Airy's Werken, die in solchen Dingen eine Autorität bilden, keinen Zweifel hinsichtlich der Unzulänglichkeit meines Apparätchens übrig zu lassen scheint. Dieser hochachtbare Gelehrte sagt in seinen Mathematical Tracts 3. Edit. pag. 284 bei Gelegenheit der Bildung von Interferenzstreifen mittelst zweier völlig gleicher Prismen mit gemeinschaftlichen Rücken: The breadth of the bars for different colours does not as before (wo von den Fresnel'schen Spiegeln die Rede war) depend simply on λ , (welcher Buchstabe die Wellenlänge eines einfachen Lichts bezeichnet) but on $\frac{\lambda}{\mu - 1}$, (wo μ den Brechungsexponenten vorstellt). Now μ varies with λ : it is greatest for the blue rays or those for which λ is least, and less for those for which λ is greater through all the different colours. Consequently the breadths of the bars formed by the different colours are not in the same proportion as before, but are more unequal. The mixture of colours therefore at the edges of those bars which are a little removed from the central bar is not the same as before, and after a smaller number from the center, the colours of the different bars are mixed with each other. Diese an und für sich völlig richtigen theoretischen Angaben eines anerkannten englischen Gelehrten scheinen in Deutschland mein Apparätchen, theilweise wenigstens, in Miskredit gebracht zu haben. Ich hingegen habe bei sehr vielen vergleichenden Versuchen, und auch jüngst wieder in meinen Vorlesungen, wo ich, um meinen Zuhörern die Vergleichung zu erleichtern, den Spiegelapparat so regulirte, dass die in ihm sich zeigenden Streifen gleiche Breite mit denen meines Prismenapparates hatten, in den Spiegelglasstücken nie weniger Streifen gefunden als in den Fresnel'schen Spiegeln, eher ein Paar mehr in Folge der bei jenem vorhandenen viel grössern Lichtstärke. Auch zeigt eine ganz einfache rechnende Auseinanderlegung der Grösse $\frac{\lambda}{\mu}$, dass eine wahrnehmbare Verschiedenheit in der

nennen, welche durch die Normale zu den Oberflächen der Platte und durch deren optische Axen gehen), in einander, deren optische Axen

Anzahl und dem Aussehen der Streifen bei den beiden Apparaten sich nicht wohl früher offenbaren könne, als bei etwa 50 vorhandenen Streifen, während sich in der Wirklichkeit doch kaum je mehr als 13 solcher Streifen an dem einen wie an dem andern wahrnehmen lassen, so dass eine Verschiedenheit in den beiden Apparaten theoretisch zwar begründet ist, jedoch ausserhalb aller Erfahrung liegt. Ich vermuthe daher, dass Airy's letzter Satz: „and after a smaller number from the center the colours of the different bars are mixed with each other“, der allerdings auf eine wirkliche Beobachtung sich zu stützen scheint, einem andern Umstande seine Entstehung verdankt, von dem ich hier, den Experimentatoren zu Liebe, noch etwas ausführlicher reden werde. Wenn man einen einzigen Spiegelstreifen von seiner Mitte aus nach beiden Enden hin dünner schleift, so dass derselbe zwei mit ihrem Rücken gegen einander gekehrte sehr schwache Prismen in sich vereinigt, und dann polirt, so gibt dieses Doppelprisma, von welchem auch in Herschel's Optik (Schmidt'sche Uebersetzung §. 736) die Rede ist, nicht völlig die gleiche Erscheinung, wie meine beiden neben einander hingestellten Spiegelglasstücke, oder wie die Fresnel'schen Spiegel. Die in dem einen Doppelprisma gebildete Erscheinung unterscheidet sich namentlich von der in den letzt genannten Apparaten auftretenden dadurch, dass die Streifen von der Mitte aus nach beiden Seiten hin bald in hellen Säumen verbleichen, während sie in den beiden andern Apparaten auf dunklerem Grunde liegen, in dem sie länger sichtbar bleiben. Auch nehmen jene häufig eine abwechselnd röthliche und grünliche Färbung an. Auf die hier angeführte Erscheinung mit hellen Säumen zu beiden Seiten dürften Airy's Worte zu beziehen seyn; diese enthält immer nur beträchtlich weniger Abwechselungen, als die Fresnel'schen Spiegel oder meine zwei Spiegelglasstücke sehen lassen. Stellt man indessen vor den Rücken des Doppelprismas, da wo seine beiden angeschliffenen Flächen an einander gränzen, irgend einen undurchsichtigen Körper von der erforderlichen Dicke, wie z. B. eine Stricknadel, so verschwinden die hellen Säume zu beiden Seiten der Erscheinung, und

hingegen nach entgegengesetzten Seiten von der, beiden Platten gemeinschaftlichen Normale zu liegen kommen, und betrachtet sie zwischen zwei Polarisationsapparaten, deren Polarisations Ebenen senkrecht auf einander stehen, im homogenen Lichte, so wird man dadurch überrascht, dass jetzt in denselben Platten, die sonst immer nur geradlinige Streifen sehen lassen, ein System von unzählig vielen Ellipsen, deren grosse Axen den vereinigten Hauptnormalebenen der beiden Platten parallel laufen, mit einem centralen, dunkeln, ovalen Flecken, aber ohne alle Spur von dunkeln Armen sich zeigt, wie in (Fig. 7) versinnlicht worden ist. Lässt man die beiden Polarisations Ebenen allmählig in einander übergehen, so ändert sich die eben angezeigte Erscheinung nach und nach in ihr Complementärbild ab, wodurch sie indessen kein sehr verändertes Aussehen annimmt, nur dass der vorhin dunkle und von einer breiten hellen Ellipse umgebene Centralfleck jetzt in einen hellen und von einer breiten dunklen Ellipse umgebenen sich verwandelt hat. Während dieses Ueberganges, mitten zwischen den zwei äussersten Stellungen der beiden Polarisationsapparate, nimmt das ganze Gesichtsfeld ein gleichmässiges Hell-dunkel an, was auch geschieht, wenn bei senkrechten oder parallelen Polarisations Ebenen die vereinigte Hauptnormalebene in einer dieser Ebenen oder senkrecht auf ihr steht. Die hier beschriebene Erscheinung

diese nimmt wieder den Charakter von der an, welche man bei den übrigen Interferenzapparaten wahrzunehmen pflegt, wiewohl sie stets lichtschwächer zu seyn scheint, und daher wohl nie die Streifen in der gleichen Anzahl wie die andern Apparate in sich aufnimmt. Ohne allen Zweifel macht sich bei diesem Doppelprisma aus einem Stücke Glas wieder jene Besonderheit geltend, auf die ich schon in meinem Eingangs erwähnten Aufsätze aufmerksam gemacht habe, in Folge der ein vom Rande eines Spiegels genommener Abschnitt für sich allein schon auf der Seite, wo sich während der Bearbeitung des Spiegels das rothe Polirpulver angehängt hat, Interferenzstreifen in grosser Menge, welche nach den Seiten hin stets näher an einander rücken, sehen lässt.

tritt nämlich am deutlichsten auf, wenn die vereinigte Hauptnormalebene einen Winkel von 45° mit einer der senkrecht auf einander stehenden oder parallelen Polarisationssebenen bildet, nimmt mit diesem Winkel stets ab und verschwindet endlich gänzlich, wenn dieser Winkel null ist. Nimmt man zu diesen Versuchen gleich dicke Platten von Bergkrystall, deren Oberflächen unter 45° zur optischen Axe geneigt sind, so wird die Erscheinung, wie wegen des Drehungsvermögens dieses Minerals zu erwarten war, eine andere, deren Hauptunterschied darin liegt, dass neben den Ellipsen gleichzeitig geradlinige Streifen auferstehen, die eine senkrechte Stellung zu den grossen Axen der Ellipsen haben, und je nach der Lage der Hauptnormalebene die Ellipsen überstrahlen oder von diesen bis zu ihrem gänzlichen Verschwinden bei einer völlig bestimmten Lage der Hauptnormalebene überstrahlt werden. Man wird ohne mein Erinnern einsehen, dass diese eigenthümliche Modification der Erscheinung im Bergkrystall für die nähere Kenntniss der Eigenthümlichkeiten dieses Körpers höchst wichtig zu werden verspricht.

Obgleich die so eben beschriebene Erscheinung wegen der Sonderbarkeit ihrer Entstehungsbedingungen längst in unsere Lehrbücher übergegangen seyn müsste, wenn sie früher schon beobachtet worden wäre, und dies um so mehr, da sie, wovon ich mich bald überzeugen konnte, bereits schon in den bekannten Rechnungsformeln, die wir der Wellentheorie des Lichts verdanken, enthalten sind, so nahm ich nichts desto weniger Anstand, mit ihr als einer neuen hervor zu treten, besonders aus dem Grunde, weil sie in Krystallplatten sich zeigt, die in den Händen eines jeden Physikers zu seyn pflegen, und es mir desshalb unglaublich schien, dass sie sich so lange verborgen zu halten im Stande gewesen seyn sollte. Um in dieser Beziehung mir nichts vorwerfen zu müssen, nahm ich die Gelegenheit wahr, sie sowohl in der ersten als zweiten Section der im vorigen Jahre in Gotha tagenden Naturforscherversammlung vorzuzeigen, und die Bitte beizufügen, mich davon in

Kenntniss zu setzen, wenn vielleicht einem der anwesenden Herren diese Erscheinung oder auch nur Analoges bekannt geworden seyn sollte; aber obgleich daselbst viele ausgezeichnete Gelehrte und sogar Schriftsteller im Fache der Optik zu finden waren, wurde mir doch nicht die geringste Anzeige zu Theil, und so halte ich mich für berechtigt, dieselbe als eine vor mir noch nicht beobachtete auszugeben. Es lassen sich zwei Ursachen für ihr kaum begreifliches so langes Verborgenbleiben angeben. Einmal bedient man sich zweier vereinigter Krystallplatten gewöhnlich nur zu Versuchen im Tageslichte, während die hier besprochene Erscheinung sich nicht anders als im homogenen Lichte zeigt, im Tageslichte dagegen nie gesehen werden kann; dann dienen zum Nachweis der geradlinigen Interferenzstreifen im Tageslichte häufig Bergkrystallplatten, die, wenn sie auch zufällig im homogenen Lichte gebraucht worden wären, jene Erscheinung nur in so verwickelter Weise zur Anschauung kommen lassen, dass der Beobachter leicht unsicher bleiben konnte, wohin er sie zu stellen habe. Der Bergkrystall ändert vermöge seiner individuellen Natur diese Erscheinung ungleich stärker ab, als er bei allen vordem beobachteten Interferenzerscheinungen thut und ist daher am wenigsten geeignet, sie in ihrer Reinheit erkennen zu lassen.

Die nun folgende Abhandlung hat sich zum Ziel gesetzt, den Entstehungsgrund der bisher besprochenen Erscheinung aufzudecken; weil sich aber an sie andere Betrachtungen von ungemeiner Wichtigkeit für die Lichtwellentheorie anknüpfen lassen, diese jedoch nur an der Hand von allgemeineren Formeln als die bisher gegebenen angestellt werden können, so sehe ich mich genöthigt, eine allgemeine Theorie des Gangs des Lichtes durch einaxige Krystallplatten voraus zu schicken und glaube, damit kein unnützes Unternehmen begonnen zu haben, da unsere Literatur in diesem Felde, obgleich an jeder Stelle von einem glänzenden Fortschritte bezeichnet, doch im Grunde noch sehr jugendlich ist. Die

gegeben herleiten lässt, in welchem a die grösste Ausweichung, deren Quadrat die Stärke des aus diesen Wellen hervorgehenden Lichtes an die Hand gibt, π das Verhältniss des Umfangs eines Kreises zu seinem Durchmesser, t die beliebig zu wählende Zeit und x den Abstand eines willkürlich in's Auge gefassten bewegten Theilchens von einer unveränderlichen Ebene vorstellt, mit welcher die sämtlichen Stirnflächen parallel laufend in unserm besondern Falle angenommen worden sind, weshalb auch die in vorstehendem Ausdrücke enthaltenen Wellen *ebene Wellen* genannt werden; ausserdem bezeichnet noch λ die Länge einer Welle homogenen Lichts und v die Fortschrittgsgeschwindigkeit derselben. Die Richtung der Schwingungen, so wie die von dieser Richtung abhängige Bahn des schwingenden Theilchens bleibt in dem vorstehenden Ausdrücke völlig unbestimmt, so dass man diese in jedem Einzelfalle aus den übrigen dabei vorkommenden Umständen erst noch zu erkennen hat. Die Natur der im obigen Ausdrücke enthaltenen Wellen spricht sich in folgenden Betrachtungen aus: Fasst man irgend ein bewegtes Theilchen in's Auge, dessen Abstand x von der unveränderlichen Ebene, die wir von jetzt an die *Distanzebene* nennen werden, im Ruhezustande eine gegebene unveränderliche Grösse ist, so geht aus obigem Ausdrücke hervor, dass dieses Theilchen jedesmal wieder die gleiche Ausweichung von seinem Ruhezustande erhält, so oft t einen um die Grösse $\frac{\lambda}{v}$ abgeänderten Werth angenommen hat, es stellt mithin $\frac{\lambda}{v}$ die Zeit vor, in welcher das Theilchen einmal seine Bahn durchläuft. Stellt T diese bestimmte Zeit vor, so hat man also

$$T = \frac{\lambda}{v};$$

denkt man sich aber die Zeit t in obigem Ausdrücke unveränderlich, so zeigt er den Zustand aller bewegten Theile in einem und demselben Augenblicke an, und aus seinem Baue geht hervor, dass alle die Theilchen eine gleiche Ausweichung von ihrer Ruhelage erfahren haben, deren Abstände von der Distanzebene einen um λ oder um ein Viel-

faches von λ verschiedenen Werth besitzen, weil in diesem wie in dem vorigen Falle der zum Sinus gehörige Winkel des obigen Ausdrucks seinen Werth um 2π ändert und darum dieser Sinus selbst immer wieder die gleiche Aufeinanderfolge von Werthen hergibt. Hieraus folgt weiter, dass zwei Stellen im Raume, deren Abstände von der Distanzebene um weniger als λ von einander verschieden sind, zu derselben Zeit nicht in einerlei Zustand sich befinden können, und dass dieselbe Stelle nicht den gleichen Zustand aufweisen kann zu zwei verschiedenen Zeiten, die um weniger als $\frac{\lambda}{v}$ oder T von einander verschieden sind. Die zwischen zwei um die Strecke λ aus einander liegenden, mit der Distanzebene parallelen Ebenen in einem bestimmten Augenblicke vorhandenen Ausweichungen der Theile aus ihrer Gleichgewichtslage kehren sonach in dem gleichen Augenblicke ganz eben so zwischen je zwei solchen Ebenen von dem Abstände λ wieder, die sich unmittelbar an die vorigen und an einander anreihen; und eben so kehren alle Vorgänge zwischen zwei solchen Ebenen in den unmittelbar hinter einander herlaufenden Zeitabschnitten von der Dauer T oder $\frac{\lambda}{v}$ stets in der gleichen Weise wieder.

Die eben beschriebenen, in dem obigen Ausdrücke enthaltenen ebenen Wellen würden indessen wegen ihrer Besonderheit für die Lichttheorie von keiner so grossen Bedeutung seyn, wenn nicht die höhere Rechnung seit Fourier uns die Ueberzeugung gebracht hätte, dass bei Schwingungen von so geringem Umfange, wie sie im Lichte vorkommen, jeglicher Wellenzug immer als Summe von lauter ebenen Wellenzügen angesehen werden darf und dass die Wirkung von jenem zu irgend einer Zeit die Summe der Wirkungen von diesen zu der gleichen Zeit ist, wodurch es möglich wird, Wellenzüge von jeglicher Art unter allen Umständen, falls sie nur aus unendlich kleinen Schwingungen zusammengesetzt sind, auf ebene Wellenzüge zurückzuführen, und also

den ebenen Wellen eine Allgemeinheit zu vindiciren, wobei sie alle andern möglichen Wellen in sich begreifen. Damit aber ebene Wellenzüge jenen Grad der Allgemeinheit behaupten können, müssen unserm Ausdruck alle die Beschränkungen genommen werden, die bloß seine Form angehen, die Schwingungsbewegung selber aber nicht wesentlich berühren. So kann jeder neue ebene Wellenzug seine eigene Distanzebene besitzen und die Distanzebenen von mehrern ebenen Wellenzügen können irgend wie gegen einander geneigt seyn; auch kann in jedem einzelnen gegebenen ebenen Wellenzuge die Distanzebene mit sich selber parallel verschoben gedacht werden, denn diese Distanzebene ist gleich den in andern Fällen gebrauchten Coordinatenebenen bloß ein Mittel, auf das die im Wellenzuge vor sich gehenden Veränderungen, um sie festhalten zu können, bezogen werden, das indessen selber auf die Natur des Wellenzuges keinen Einfluss übt, weshalb bei seiner Wahl keine andere Rücksicht genommen zu werden braucht als die, dass es eine leichte Darstellung des Wellenzuges gestatte. Da eine mit sich selber parallele Verlegung der Distanzebene bei den nun kommenden Betrachtungen öfters nöthig ist, so wird es nicht überflüssig seyn, wenn wir sie noch etwas näher betrachten. Unser Ausdruck nämlich trägt die Besonderheit in sich, dass er null wird, wenn man in ihm sowohl $t=0$, wie auch $x=0$ setzt; er enthält also stillschweigend die Annahme in sich, dass in dem Augenblicke, von welchem aus die Zeit gezählt wird, die schwingenden Theilchen der Distanzebene sich in ihrer Gleichgewichtslage befinden, wodurch indessen dem ebenen Wellenzuge selber keine Besonderheit aufgedrückt wird, da sich jener Augenblick dieser Annahme gemäss wählen lässt. So lange man es bloß mit einem einzigen ebenen Wellenzuge zu thun hat, wird dieser durch den bisher vorgeführten Ausdruck vollkommen dargestellt; wenn aber mehrere ebene Wellenzüge gleichzeitig auftreten, deren Wellen sich bei jedem in der gleichen Richtung fortbewegen, und man bezieht alle diese Wellenzüge auf eine und dieselbe Distanzebene, so ist der bisher vorgeführte Aus-

druck nicht mehr allgemein genug, selbst wenn man den Grössen a , λ und v bei jedem andere Werthe beilegen wollte; denn immer würde er an alle einzelnen Wellenzüge die Bedingung stellen, dass zur Zeit 0 die in der Distanzebene liegenden Theilchen in Bezug auf jeden dieser Wellenzüge sich in ihrer Gleichgewichtslage befänden, — eine Bedingung, wodurch die gegenseitige Stellung der verschiedenen Wellenzüge bezüglich zu einander, mehr als gestattet werden kann, beschränkt würde. Diesen Uebelstand kann man jedoch dadurch umgehen, dass man statt des bisherigen Ausdrucks den

$$a \sin. \frac{2\pi}{\lambda} (vt - x + \delta)$$

nimmt und der Grösse δ von einem Wellenzug zum andern verschiedene Werthe beilegt und zwar die, wie sie die relative Stellung der verschiedenen Wellenzüge zu einander verlangt; denn bei dieser Form unsers Ausdrucks liefert er für $t = 0$ und $x = 0$ den Ausdruck $a \sin. 2\pi \frac{\delta}{\lambda}$ als Ausweichung eines schwingenden Theilchens in der Distanzebene zur Zeit 0 , und man sieht sogleich ein, dass durch eine geeignete Wahl der Grösse δ zwischen 0 und λ diese Ausweichung jede von denen werden kann, die überhaupt in diesem Wellenzuge zu finden ist. Durch die Aufnahme der von einem Wellenzug zum andern sich abändernden Grösse δ in den für den Wellenzug gegebenen Ausdruck kann man also jede relative Stellung verschiedener nach derselben Richtung sich fortpflanzender Wellenzüge zu einander durch diesen Ausdruck selber aussprechen lassen. Die Grösse δ lässt in jedem Wellenzuge seinen Zustand an einer bestimmten Stelle und zu einer bestimmten Zeit erkennen, was man dessen *Phase* nennt, und ihre Verschiedenheit von einem Wellenzug zum andern lässt das specifische Ineinandergreifen dieser Wellenzüge erkennen, was man deren *Phasenunterschied* zu nennen pflegt.

V. Die Natur einer linearen Differenzialgleichung, worauf die

Mechanik jede Wellenbewegung mit äusserst kleinen Ausweichungen der bewegten Theilchen zurückführt, bringt es mit sich, dass da wo sich die wirkliche Wellenbewegung in mehrere einfachere zerlegen lässt, — und der Fourier'sche Satz gibt das Mittel an die Hand, jegliche Wellenbewegung in lauter ebene Wellenbewegungen zu zerlegen — die aus der gegebenen Wellenbewegung entspringende Ausweichung eines jeden Theilchens von seiner Gleichgewichtslage zu jeder beliebigen Zeit immer das, mittelst des Parallelepipeds der Kräfte zu erhaltende Mittel derjenigen Ausweichungen ist, welche die einfachern Wellenbewegungen, in die sich die gegebene auflösen lässt, demselben Theilchen zu derselben Zeit jede für sich mittheilen würden. Diese Verknüpfung unterliegt den geringsten Schwierigkeiten, wenn die einfachern Wellenbewegungen, in welche sich eine gegebene auflösen lässt, sämmtlich einerlei Schwingungsrichtung haben, weil dann die Mittelwirkung einfach die Summe aller Seitenwirkungen wird. Unter dieser Voraussetzung werden wir jetzt den Einfluss zweier gleichzeitig auftretender ebener Wellenzüge auf den Zustand des durch sie in Bewegung gesetzten Mittels bestimmen, weil die Anwendung dieses besondern Falles für unsere ferneren Betrachtungen genügt. Es seien demnach

$$a_1 \sin. 2\pi \left(\frac{vt - x}{\lambda} + \delta_1 \right) \text{ und } a_2 \sin. 2\pi \left(\frac{vt - x}{\lambda} + \delta_2 \right)$$

die Ausweichungen, welche zwei ebene Wellenzüge, deren Wellen einerlei Länge haben und sich in der gleichen Richtung mit einerlei Geschwindigkeit fortbewegen, und die beide durch die geeignete Wahl ihrer Phasen δ_1 und δ_2 auf dieselbe Distanzebene bezogen worden sind, jeder für sich einem zur Zeit t in dem Abstände x von der gemeinschaftlichen Distanzebene schwingenden Theilchen mittheilen würde, so wird, wenn die Schwingungsrichtung in diesen beiden Wellenzügen die gleiche ist und beide gleichzeitig auftreten, die aus der vereinten Einwirkung hervorgehende Ausweichung desselben schwingenden Theilchens zu der gleichen Zeit seyn:

$$a_1 \sin. 2\pi \left(\frac{vt-x}{\lambda} + \delta_1 \right) + a_2 \sin. 2\pi \left(\frac{vt-x}{\lambda} + \delta_2 \right),$$

in welchem Ausdruck t und x sich auf ein und dasselbe übrigens beliebige schwingende Theilchen beziehen. Sieht man in diesem Ausdrucke die unter den Sinusen stehenden Winkel als Summen von $\frac{2\pi}{\lambda} (vt - x)$ und $2\pi\delta_1$ oder $2\pi\delta_2$ an, so lässt sich derselbe in die Form

$$(a_1 \cos. 2\pi\delta_1 + a_2 \cos. 2\pi\delta_2) \sin. \frac{2\pi}{\lambda} (vt - x) \\ + (a_1 \sin. 2\pi\delta_1 + a_2 \sin. 2\pi\delta_2) \cos. \frac{2\pi}{\lambda} (vt - x)$$

bringen und diese lässt sich auf die eines einzigen ebenen Wellenzuges zurückführen, wenn man setzt:

$$a_1 \sin. 2\pi\delta_1 + a_2 \sin. 2\pi\delta_2 = a \sin. 2\pi\delta$$

und

$$a_1 \cos. 2\pi\delta_1 + a_2 \cos. 2\pi\delta_2 = a \cos. 2\pi\delta,$$

wodurch er übergeht in:

$$a \sin. 2\pi \left(\frac{vt-x}{\lambda} + \delta \right).$$

Die hierin eingehenden Grössen a und δ lassen sich aus den unmittelbar vorangegangenen Gleichungen wie folgt erhalten:

$$\operatorname{tg}. 2\pi\delta = \frac{a_1 \sin. 2\pi\delta_1 + a_2 \sin. 2\pi\delta_2}{a_1 \cos. 2\pi\delta_1 + a_2 \cos. 2\pi\delta_2}$$

und

$$a^2 = a_1^2 + a_2^2 + 2a_1 a_2 \cos. 2\pi(\delta_1 - \delta_2),$$

wobei a^2 die Lichtstärke des aus den beiden gegebenen neu entstandenen Wellenzuges und δ seine Phase hergibt.

Ist $a_1 = a_2$, d. h. tragen die beiden gegebenen Wellenzüge gleiche Lichtstärke in sich, so wird:

$$\operatorname{tang}. 2\pi\delta = \frac{\sin. 2\pi\delta_1 + \sin. 2\pi\delta_2}{\cos. 2\pi\delta_1 + \cos. 2\pi\delta_2},$$

woraus folgt

$$\text{tang. } 2\pi\delta = \text{tang. } 2\pi \frac{\delta_1 + \delta_2}{2} \text{ oder } \delta = \frac{\delta_1 + \delta_2}{2} *),$$

und in dem gleichen Falle ergibt sich

$$a^2 = 2a_1^2 [1 + \cos. 2\pi(\delta_1 - \delta_2)];$$

ist daher auch noch $\delta_1 = \delta_2$, so findet man

$$a^2 = 4a_1^2,$$

ist hingegen $\delta_1 - \delta_2 = \pm \frac{1}{2}$, so kommt

$$a^2 = 0.$$

Hieraus folgt, dass zwei ebene Wellenzüge von gleicher Stärke, welche sich gleichzeitig in derselben Richtung fortbewegen und deren Ausweichungen in parallelen Linien geschehen, Licht von doppelter Stärke liefern, wenn beide keinen Phasenunterschied haben, dass aber zwei solche Wellenzüge sich gegenseitig gänzlich aufheben, also Finsterniss bewirken, wenn deren Phasenunterschied eine halbe Wellenlänge beträgt. Liegt der Phasenunterschied in den beiden Wellenzügen zwischen $\frac{1}{2}$ und 0 oder 1, so ist die Stärke des aus ihnen hervorgehenden einen Wellenzuges eine zwischen 0 und $4a_1^2$ liegende, die allmählich von der einen Gränze zu der andern übergeht. Da eine Aenderung von δ um 1 aus dem gleichen Grunde wie eine eben so grosse von x immer wieder auf den gleichen Zustand derselben Stelle zu derselben Zeit hinführt, so ist es stets gestattet, den Werth von δ um jede beliebige Anzahl ganzer Einheiten abzuändern, wodurch man in den

*) Es können zwar a_1 und a_2 auch Grössen mit entgegengesetzten Vorzeichen seyn; aber es braucht dieser Fall hier nicht noch besonders berücksichtigt zu werden, da man das Vorzeichen von a_1 oder a_2 durch entsprechende Abänderung der Phase δ_1 oder δ_2 stets in das umgekehrte überführen kann.

Stand gesetzt wird, diesen Werth immer positiv werden zu lassen und zwischen 0 und 1 zu nehmen, oder zwischen 0 und $\frac{1}{2}$, wenn derselbe sowohl negativ wie positiv werden darf. Das hier besprochene gegenseitige Auslöschen des in zwei Wellenzügen enthaltenen Lichtes ist offenbar dadurch bedingt, dass die Schwingungsrichtungen in beiden Wellenzügen einander parallel laufen, weil dann eine Bewegung nach der einen Seite durch eine gleich grosse nach der entgegengesetzten Seite hin einen Ruhestand des den beiden Schwingungen preisgegebenen Theilchens bewirken kann; wenn aber die Schwingungsrichtungen in den beiden Zügen einen Winkel mit einander einschliessen, kann die aus dem einen Zuge dem Theilchen mitzutheilende Bewegung durch keine aus dem andern Zuge kommende aufgehoben werden, diese mag in der Geraden, worin sie geschieht, nach der einen oder andern Seite hin erfolgen, weil diese mit der vorigen in jedem Falle einen Winkel einschliesst, und also beide dem Parallelogramm der Kräfte gemäss immer eine mittlere Bewegung hervorbringen müssen. In diesem Umstande liegt der theoretische Grund für den durch die Erfahrung an die Hand gegebenen Satz, dass zwei rechtwinklich gegen einander polarisirte Lichtzüge nicht interferiren, d. h. sich nicht gegenseitig auslöschen können.

Der hier ausgeführte Satz, welcher sich in der gleichen Weise auch auf mehr als zwei ebene Wellenzüge, deren Wellen einerlei Länge haben und sich in der gleichen Richtung mit einerlei Geschwindigkeit fortpflanzen, ausdehnen lässt, gibt den Schlüssel zur Erklärung der verschiedenartigsten Beugungserscheinungen, wie überhaupt aller Interferenzphänomene her. Uebrigens versteht es sich mit Rücksicht auf das im Eingang dieser Ziffer Angegebene von selbst, dass wenn in einer Lichtbewegung Züge mit verschiedenen Wellenlängen, jedoch stets in dem gleichen Verhältnisse enthalten sind, das eben Gesagte von jeder einer bestimmten Wellenlänge entsprechenden Art des Lichtes noch volle

Giltigkeit behält. Die Undulationstheorie geht dabei von der, mit der Erfahrung übereinstimmenden Annahme aus, dass die verschiedene Länge der Lichtwellen dem aus ihnen hervorgehenden Lichte eine verschiedene Färbung durch alle Stufen der prismatischen Farben hindurch ertheilt.

VI. Nach diesen der Lichtwellenlehre entnommenen Lehrsätzen gehen wir an die Bestimmung der Art und Weise, wie das gewöhnliche und aussergewöhnliche Licht den einaxigen Krystall durchzieht, in grösster Allgemeinheit über. Bezeichnen wir nämlich durch v die Geschwindigkeit des Lichts in der Luft, durch v' die Geschwindigkeit des gewöhnlich gebrochenen Lichts im Innern des Krystalls, die zugleich auch die des aussergewöhnlichen Lichts in der Richtung der optischen Axe ist, endlich durch v'' die Geschwindigkeit des aussergewöhnlichen Lichts in einer auf der optischen Axe senkrechten Richtung, so wird die Gleichung für die Wellenfläche des von einem Punkte A ausgehenden aussergewöhnlichen Lichtes dem in Ziffer III. Gesagten zur Folge:

$$\frac{x^2}{v'^2} + \frac{y^2 + z^2}{v''^2} = 1, \quad (1)$$

wenn die in ihr vorkommenden Coordinaten x, y, z auf 3 Axen eines rechtwinkligen Coordinatensystems bezogen werden, die durch den Punkt A hindurch gehen und von welchen die AX mit der optischen Axe des einaxigen Krystalls parallel läuft.

Die Gleichung (1) bezieht sich auf die von dem Punkte A auslaufende Wellenfläche, wie sie nach Ablauf der Zeiteinheit wird. Die Gleichung derselben Wellenfläche, wie diese nach Ablauf der Zeit t wird, ist in allgemeinerer Weise:

$$\frac{x^2}{v'^2} + \frac{y^2 + z^2}{v''^2} = t^2, \quad (2)$$

weil die Halbaxen der so dargestellten Wellenfläche in dem Verhältnisse von 1 zu t von denen der durch die Gleichung (1) dargestellten Wellenfläche verschieden sind.

Wenn nun ein ebener Wellenzug sich in schiefer Richtung gegen die Oberfläche des Krystalls hinbewegt, und man denkt sich durch irgend einen Punkt A der Oberfläche, welcher von dem Wellenzug getroffen wird, eine Ebene senkrecht auf die Richtung des ankommenden Lichts gelegt, so enthält die Durchschnittslinie dieser Ebene mit der Oberfläche des Krystalls, so weit diese von dem Lichte getroffen wird, lauter Stellen in sich, die in einerlei Augenblick einerlei Phase der Bewegung in sich tragen, und einer Geraden angehören, wenn die Oberfläche des Krystalls eine Ebene bildet. Legt man durch eine ausserhalb dieses Durchschnittes befindliche Stelle derselben Oberfläche, die von dem vorigen Querschnitt des gleichen Wellenzuges in einer etwas spätern Zeit getroffen wird, wieder eine Ebene senkrecht auf die Richtung des ankommenden Lichtes, so schneidet diese die ebene Oberfläche des Krystalls wieder in einer Geraden, welche in dem gleichen Augenblicke lauter Stellen von einerlei Phase in sich begreift. Bezeichnet man den Abstand der beiden auf der Richtung des ankommenden Lichtes senkrechten Ebenen von einander durch d , so gehören die Stellen gleicher Phase in der zweiten Ebene, da der Wellenzug in der Luft während der Zeiteinheit den Weg v zurücklegt, einer um $\frac{d}{v}$ spätern Zeit an als in der ersten Ebene. Hieraus folgt, dass während die an der Gränzfläche des Krystalls liegenden Stellen der ersten Ebene, jede von sich aus, Wellen in den Krystall hinein erzeugen, die der zweiten Ebene angehörigen Stellen der Oberfläche des Krystalls ebenfalls Wellen bilden, die sämtlich ihren Ursprung in der Krystalloberfläche haben, und von einem und demselben Querschnitt des ebenen Wellenzuges herkommen, aber ihren Anfang bei der zweiten Ebene zu einer um $\frac{d}{v}$ verschiedenen Zeit von der nehmen, die den zur ersten Ebene gehörigen Stellen der Krystalloberfläche entspricht. In einem und demselben Augenblicke, wo die zur ersten Ebene gehörigen Stellen der Krystalloberfläche nach Ablauf der Zeit 1 Wellenflächen in den Krystall hinein er-

zeugt haben, die von der Gleichung (1) dargestellt werden, werden die Stellen der zweiten Ebene an der Oberfläche des Krystalls Wellen in ihn hinein gebildet haben, die zwar ganz von derselben Art sind, aber der Zeit $1 - \frac{d}{v}$ entsprechen, also aus der Gleichung (2) erhalten werden, wenn man in dieser $1 - \frac{d}{v}$ an die Stelle von t setzt. Diese letztern Wellenflächen werden sonach dargestellt durch die Gleichung:

$$\frac{x^2}{v'^2} + \frac{y^2 + z^2}{v''^2} = \left(1 - \frac{d}{v}\right)^2. \quad (3)$$

Diese beiderlei durch die Gleichungen (1) und (3) dargestellten Wellenflächen, welche von verschiedenen Stellen der Oberfläche des Krystalls ausgehen, entsprechen einem und demselben Augenblicke, welchen Werth man auch der Grösse d beilegen mag; wählt man nun d so, dass $1 - \frac{d}{v} = 0$, d. h. $d = v$ wird, so geht die Gleichung (3) über in:

$$\frac{x^2}{v'^2} + \frac{y^2 + z^2}{v''^2} = 0,$$

welche aussagt, dass die von ihr dargestellte Wellenfläche, welche alle die Stellen in sich trägt, für welche $d = v$ ist, nur einen einzigen Punkt ausmacht in dem Augenblicke, wo durch die Gleichung (1) das der Zeiteinheit entsprechende Rotationsellipsoid in Bezug auf alle die Stellen, wo $d = 0$ ist, angezeigt wird. In dem Augenblicke also, wo die zur ersten Ebene gehörigen Stellen der Krystalloberfläche Wellenflächen von der durch die Gleichung (1) gegebenen Grösse in den Krystall hinein erzeugt haben, sind die von solchen Stellen der Krystalloberfläche ausgehenden Wellen, welche im Durchschnitt einer mit der erstern parallel laufenden und von jener um v entfernten Ebene liegen nur noch Punkte, die in dem Falle einer Geraden angehören, wenn die Oberfläche des Krystalls eine Ebene bildet und der auf sie fallende Wellenzug ein ebener ist. Aus den vorstehenden Folgerungen nun geht mit Berücksichtigung der in Ziffer I. ausgesprochenen, der Wellentheorie eigenthümlichen Vorstellungsweisen ohne weitere Schwierigkeit hervor,

dass das auf eine beliebige Stelle der Oberfläche eines einaxigen Krystalls auffallende Licht im Krystalle einen aussergewöhnlichen Strahl erzeugt, dessen Richtung und Geschwindigkeit dadurch gefunden wird, dass man das von der Gleichung (1) dargestellte Umdrehungsellipsoid in solcher Weise beschreibt, wobei sein Mittelpunkt mit der Stelle zusammenfällt, in welcher das Licht ankommt, und dessen Polaraxe mit der optischen Axe des Krystalls parallel läuft, hierauf an dieses Ellipsoid eine Berührungsebene legt, welche durch jene Gerade hindurch geht, in welche die ebene Oberfläche des Krystalls von einer Ebene geschnitten wird, die senkrecht auf der Richtung des einfallenden Lichtes steht und von der zur Gleichung (1) gehörigen Stelle um v entfernt ist; dann gibt nämlich der vom Mittelpunkt des Ellipsoids nach dem so eben bezeichneten Berührungspunkte gezogene Radiusvector durch seine Lage die Richtung und durch seine Länge die Geschwindigkeit des aussergewöhnlichen Lichtstrahls zu erkennen.

Um diese Grössen durch Rechnung zu bestimmen, wollen wir durch α, β, γ die Winkel bezeichnen, welche die Richtung des einfallenden Lichtes mit den Coordinatenaxen der x, y, z bildet, dann stellt

$$(4) \quad x \cos. \alpha + y \cos. \beta + z \cos. \gamma = 0$$

den einfachsten Sätzen der analytischen Geometrie gemäss die Ebene dar, welche senkrecht auf der Richtung des einfallenden Lichtes steht und durch den Mittelpunkt des Ellipsoids (1) geht; ferner stellt die Gleichung

$$(5) \quad x \cos. \alpha + y \cos. \beta + z \cos. \gamma = v$$

die Ebene dar, welche mit der vorigen parallel läuft und den Abstand v von ihr hat. Bezeichnen in ähnlicher Art a, b, c die Winkel, welche die Richtung der Normale zur vordern Gränzfläche des Krystalls mit den gleichen Coordinatenaxen bildet, so wird durch die Gleichung

$$(6) \quad x \cos. a + y \cos. b + z \cos. c = 0$$

die vordere Gränzfläche des Krystalls selber vorgestellt, vorausgesetzt, dass diese eben ist, und diese Gleichung (6) in Verbindung mit der (5) stellt die Gerade dar, durch welche die das Ellipsoid (1) berührende Ebene hindurch geführt werden muss, wobei allen diesen Gleichungen dieselben im Eingange angeordneten Coordinatenaxen zu Grunde liegen. Stellen endlich ξ , η , ζ , (welchen Buchstaben wir ein e anhängen werden, so lange unsere Betrachtungen das aussergewöhnliche Licht angehen, ein o, wenn sie sich auf das gewöhnliche Licht beziehen) die Coordinaten des Punktes vor, in welchem das Ellipsoid (1) von der Ebene berührt wird, welche durch jene Gerade geht, die der Durchschnitt der Ebenen (5) und (6) ist, so hat der zu diesem Berührungspunkte gehörige Radiusvector die Grösse $\sqrt{\xi_e^2 + \eta_e^2 + \zeta_e^2}$, und da dieser Radiusvector die Geschwindigkeit des aussergewöhnlichen Lichts bei einem bestimmten Einfallswinkel hergiebt, welche wir oben durch e bezeichnet haben, so hat man:

$$e^2 = \xi_e^2 + \eta_e^2 + \zeta_e^2 \quad (7)$$

und die Cosinuse der Winkel, welche dieser aussergewöhnliche Lichtstrahl mit den Coordinatenaxen macht, sind

$$\frac{\xi_e}{e}, \quad \frac{\eta_e}{e}, \quad \frac{\zeta_e}{e}, \quad (8)$$

weil der Ziffer II. zur Folge e unter allen Umständen diese veränderliche, von der Richtung des einfallenden Lichtes abhängige Geschwindigkeit vorzustellen hat.

Um aber die Coordinatenwerthe ξ_e , η_e , ζ_e des Berührungspunktes durch Rechnung zu erhalten, hat man erstlich zu erwägen, dass derselbe dem Ellipsoid (1) angehört, dass also seine Coordinaten die Gleichung

$$\frac{\xi_e^2}{a^2} + \frac{\eta_e^2}{b^2} + \frac{\zeta_e^2}{c^2} = 1 \quad (9)$$

befriedigen müssen; ferner dass die durch den Punkt ξ_e, η_e, ζ_e gehende Ebene, welche das Ellipsoid (1) in ihm berührt, den Regeln der analytischen Geometrie gemäss zur Gleichung

$$(10) \quad \frac{\xi_e (x - \xi_e)}{v'^2} + \frac{\eta_e (y - \eta_e)}{v''^2} + \frac{\zeta_e (z - \zeta_e)}{v''^2} = 0, \text{ oder} \\ \frac{\xi_e x}{v'^2} + \frac{\eta_e y}{v''^2} + \frac{\zeta_e z}{v''^2} = 1$$

hat. Da diese Berührungsebene durch den Durchschnitt der beiden Ebenen (5) und (6) gehen soll, so muss jeder Punkt dieses Durchschnitts der Berührungsebene (10) selber angehören; drückt man daher mittelst der Gleichungen (5) und (6) z und y durch x aus und setzt man die so für z und y erhaltenen Werthe in die Gleichung (10) ein, so muss diese befriedigt seyn, welchen reellen Werth man auch der Grösse x geben mag. In Folge dieses Umstandes zerfällt die in der angezeigten Weise transformirte Gleichung (10) in zwei andere, und zwar in die zwei folgenden:

$$(7) \quad \eta_e \cos. c - \zeta_e \cos. b = \frac{v'^2}{v} (\cos. \beta \cos. c - \cos. b \cos. \gamma)$$

und

$$\eta_e (\cos. \alpha \cos. c - \cos. a \cos. \gamma) - \zeta_e (\cos. \alpha \cos. b - \cos. a \cos. \beta)$$

$$(8) \quad = \frac{v'^2}{v} \xi_e (\cos. \beta \cos. c - \cos. b \cos. \gamma),$$

denen man mit Leichtigkeit die nachstehenden Formen geben kann:

$$(11) \quad \left\{ \begin{array}{l} \eta_e \cos. a = \xi_e \frac{v'^2}{v} \cos. b - \frac{v'^2}{v} (\cos. \alpha \cos. b - \cos. a \cos. \beta) \\ \text{und} \\ \zeta_e \cos. a = \xi_e \frac{v'^2}{v} \cos. c - \frac{v'^2}{v} (\cos. \alpha \cos. c - \cos. a \cos. \gamma), \end{array} \right.$$

welche jedoch in dem besondern Falle, wo $\cos. a = 0$ ist, beide in einander übergehen und aussagen, dass in diesem Falle

$$\xi_e = \frac{v'^2}{v} \cos. \alpha$$

ist. Die Gleichungen (11) geben die Coordinaten η_e und ζ_e des Be-

rührungspunktes, so wie dessen ξ_e bekannt ist, und zur Kenntniss dieser letztern Coordinate gelangt man auf die folgende Weise. Erstlich findet man aus den Gleichungen (11):

$$\begin{aligned} (\eta_e^2 + \xi_e^2) \cos^2 a &= \xi_e^2 \frac{v''^4}{v'^4} (\cos^2 b + \cos^2 c) \\ &+ 2\xi_e \frac{v''^4}{v'v'^2} [\cos a (\cos b \cos \beta + \cos c \cos \gamma) - \cos \alpha (\cos^2 b + \cos^2 c)] \\ &+ \frac{v''^4}{v'^2} [\cos^2 \alpha (\cos^2 b + \cos^2 c) + \cos^2 a (\cos^2 \beta + \cos^2 \gamma) \\ &- 2 \cos \alpha \cos a (\cos b \cos \beta + \cos c \cos \gamma)], \end{aligned}$$

oder, weil $\cos^2 a + \cos^2 b + \cos^2 c = 1$, $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$ und

$\cos a \cos \alpha + \cos b \cos \beta + \cos c \cos \gamma = \cos i$ ist, wenn i den Winkel bezeichnet, den die Richtung des einfallenden Lichtes mit der Normale zur Oberfläche des Krystalls bildet:

$$\begin{aligned} (\eta_e^2 + \xi_e^2) \cos^2 a &= \xi_e^2 \frac{v''^4}{v'^4} \sin^2 a + 2\xi_e \frac{v''^4}{v'v'^2} (\cos a \cos i - \cos \alpha) \\ &+ \frac{v''^4}{v'^2} (\cos^2 \alpha + \cos^2 a - 2 \cos \alpha \cos a \cos i). \end{aligned}$$

Sodann erhält man aus der Gleichung (9):

$$(\eta_e^2 + \xi_e^2) \cos^2 a = v''^2 \cos^2 a - \frac{v''^2}{v'^2} \xi_e^2 \cos^2 a$$

und diese in Verbindung mit der zuletzt erhaltenen Gleichung liefert

$$\begin{aligned} v''^2 \cos^2 a &= \xi_e^2 \frac{v''^2}{v'^2} (v''^2 \sin^2 a + v'^2 \cos^2 a) + 2\xi_e \frac{v''^4}{v'v'^2} (\cos a \cos i - \cos \alpha) \\ &+ \frac{v''^4}{v'^2} (\cos^2 \alpha + \cos^2 a - 2 \cos \alpha \cos a \cos i), \end{aligned}$$

woraus man durch Auflösung nach ξ_e , wenn

$$v''^2 \sin^2 a + v'^2 \cos^2 a = m^2 \quad (12.a)$$

gesetzt wird, findet:

$$\begin{aligned} \xi_e \frac{v''^2 v'^2}{v m^2} (\cos \alpha - \cos a \cos i) &+ \frac{v'^2}{v m^2} \cos a [v^2 m^2 - v''^2 m^2 \sin^2 i] \\ &+ (v''^2 - v'^2) (\cos \alpha - \cos a \cos i)^2 \Big]^{1/2}, \end{aligned} \quad (12.b)$$

womit das Auffinden aller Coordinaten des Berührungspunktes beendigt ist.

Die bisherige Rechnung trägt indessen die Sonderbarkeit an sich,

dass sie an einem unbestimmten Coordinatensysteme vor sich geht, indem blos dessen x-Axe eine feste, der optischen Axe parallele Stellung erhalten hat, während dessen beide andern Axen rechtwinklig unter sich und zur ersten Axe vorausgesetzt worden sind, also eine unendlich grosse Menge von unter sich verschiedenen Stellungen annehmen können; darum wollen wir diese Unbestimmtheit noch dadurch beseitigen, dass wir zwar die x-Axe unseres Coordinatensystems parallel zur optischen Axe liegen, dessen z-Axe hingegen in die Hauptnormalebene des Krystalls hinein fallen lassen, dann liegen die x-Axe, die z-Axe und zugleich die Normale zur Oberfläche in der Hauptnormalebene des Krystalls; es sind also, wenn wir uns diese beiden Axen in das Innere des Krystalls hinein gerichtet denken, die Winkel a und c Complementswinkel, so dass $\cos. c = \sin. a$ und $\sin. c = \cos. a$ wird, und die y-Axe steht dann nothwendig senkrecht zu dieser Hauptnormalebene und bildet desswegen mit der Normale einen rechten Winkel, so dass jetzt $\cos. b = 0$ wird, und die Gleichungen (11) übergehen in:

$$(12. c) \left\{ \begin{array}{l} \eta_e = \frac{v''^2}{v} \cos. \beta \quad \text{und} \\ \xi_e \cos. a = \xi_e \frac{v''^2}{v} \sin. a - \frac{v''^2}{v} (\cos. \alpha \sin. a - \cos. a \cos. \gamma), \end{array} \right.$$

während die Gleichungen (12. a und b) unverändert dieselben bleiben.

Ehe wir weiter gehen, wollen wir bemerken, dass der Winkel a der ist, den die Normale zur Krystalloberfläche mit der optischen Axe bildet, und also zu den Coordinatenaxen in gar keinem Bezug mehr steht. Eben so lassen sich die 3 Grössen $\cos. \alpha$, $\cos. \beta$, $\cos. \gamma$ von dem Coordinatensysteme auf folgende Weise völlig unabhängig machen. Stellen AX, AZ (Fig. 1) die von der Stelle A, in welcher der einfallende Strahl JA die Krystalloberfläche trifft, in den Krystall hinein laufenden beiden in der Hauptnormalebene liegenden Coordinatenaxen und AN die ebenfalls in den Krystall hinein laufende Normale zu dessen Oberfläche vor, und ist A $\mathfrak{S}$ die in den Krystall hinein verlängerte Richtung JA, in

der das Licht auffällt, so bilden die 3 Richtungen AX, A $\mathfrak{S}$ und AN ein sphärisches Dreieck, dessen eine Seite $\mathfrak{S}AX$ der Winkel α ist, während dessen beide andere Seiten XAN und NA $\mathfrak{S}$, welche die Winkel a und i sind, den aus der Einfallsebene $\mathfrak{S}AN$ und der Hauptnormalebene NAX gebildeten Flächenwinkel einschliessen, den wir durch ω bezeichnen wollen, so dass man zufolge eines bekannten Satzes aus der sphärischen Trigonometrie hat:

$$\cos. \alpha = \cos. a \cos. i + \sin. a \sin. i \cos. \omega.$$

Ebenso bilden die 3 Richtungen A $\mathfrak{S}$, AN und AZ ein sphärisches Dreieck, in welchem die Seite $\mathfrak{S}AZ$ der Winkel γ ist, während die beiden andern Seiten $\mathfrak{S}AN$ und ZAN, welche die Winkel i und $90^\circ - a$ sind, den aus der Einfallsebene $\mathfrak{S}AN$ und der Hauptnormalebene ZAN, welche auf der andern Seite von AN liegt, als die eben zur Sprache gekommene XAN, gebildeten Flächenwinkel einschliessen, der mithin der Nebenwinkel von dem eben gehabt also $180^\circ - \omega$ ist, so dass man demselben Satze aus der sphärischen Trigonometrie zur Folge hat:

$$\cos. \gamma = \cos. i \sin. a - \sin. i \cos. a \cos. \omega.$$

Endlich bilden die Richtungen A $\mathfrak{S}$ und AN mit der Richtung AY, welche senkrecht auf der Hauptnormalebene, sohin auch auf der in ihr liegenden Richtung AN steht, ein sphärisches Dreieck, in welchem die Seite $\mathfrak{S}AY$ der Winkel β ist, während die beiden andern Seiten YAN und NA $\mathfrak{S}$, welche die Winkel 90° und i sind, den aus der Einfallsebene und aus der auf der Hauptnormalebene senkrechten Ebene gebildeten Flächenwinkel einschliessen, der also $90^\circ - \omega$ oder $\omega - 90^\circ$ und dessen Cosinus mithin $\sin. \omega$ in jedem solchen Falle ist, wo YAN und $\mathfrak{S}AN$ auf einerlei Seite von der Hauptnormalebene liegen; der aber $90^\circ + \omega$ oder $360^\circ - (90^\circ + \omega)$, und dessen Cosinus dann jedesmal gleich $-\sin. \omega$ ist, wenn YAN und $\mathfrak{S}AN$ auf entgegengesetzten Seiten von der Hauptnormalebene liegen. Aus diesem Grunde ist demselben Satze aus der sphärischen Trigonometrie gemäss:

$\cos. \beta = \pm \sin. i \sin. \omega,$
 wo das obere oder untere Vorzeichen zu nehmen ist, je nachdem die Richtungen AY und AS auf einerlei oder auf entgegengesetzten Seiten von der Hauptnormalebene liegen. Mittels der so eben erhaltenen Werthe von $\cos. \alpha$ und $\cos. \gamma$ findet man, dass

$$\cos. \alpha \sin. a - \cos. a \cos. \gamma = \sin. i \cos. \omega$$

und

$$\cos. \alpha - \cos. a \cos. i = \sin. a \sin. i \cos. \omega$$

ist, und nun gehen die Gleichungen (12. a und b) über in:

$$(13. a) \quad v''^2 \sin^2. a + v'^2 \cos^2. a = m^2$$

und

$$(13. b) \quad \left\{ \begin{aligned} \xi_e &= \frac{v''^2 v'^2}{v m^2} \sin. a \cos. a \sin. i \\ &+ \frac{v'^2}{v m^2} \cos. a [v^2 m^2 - v''^2 m^2 \sin^2 i + (v''^2 - v'^2) \sin^2. a \cos^2. \omega \sin^2. i] \end{aligned} \right.$$

während die Gleichungen (12. c) werden:

$$(13. c) \quad \left\{ \begin{aligned} \eta_e &= \pm \frac{v''^2}{v} \sin. \omega \sin. i \end{aligned} \right.$$

und

$$\xi_e \cos. a = \xi_e \frac{v''^2}{v} \sin. a - \frac{v''^2}{v} \cos. \omega \sin. i.$$

Nachdem mittelst dieser Gleichungen und derer (7) und (8) die Richtung und Geschwindigkeit des aussergewöhnlichen Strahls aufgefunden worden ist, lässt sich dasselbe auch für den gewöhnlichen Strahl ganz in der gleichen Weise thun. Dabei verwandelt sich die Gleichung des Ellipsoids in die Gleichung der Kugelfläche, welche die Wellenfläche für den gewöhnlichen Strahl hergibt und aus jener dadurch hervorgeht, dass man $v'' = v'$ setzt, alles Uebrige bleibt ganz das Gleiche; bezeichnet man daher durch ξ_o, η_o, ζ_o die Coordinaten der Stelle, an welcher der gewöhnliche Strahl die Kugelfläche durchbricht, so erhält man diese einfach aus denen ξ_e, η_e, ζ_e dadurch, dass man v' an die Stelle von v'' setzt. Auf diesem Wege indessen würden sich unsere

fernern Zwecke nicht ohne einige Weitläufigkeit erreichen lassen, und dies veranlasst uns, die bisher erhaltenen Resultate an einem neuen Coordinatensysteme darzustellen.

VII. Denkt man sich das Coordinatensystem der vorigen Ziffer, (dessen x- und z-Axe (Fig. 1) in der Hauptnormalebene lagen, und zwar so, dass die x-Axe parallel mit der optischen Axe des Krystalls lief, und dessen y-Axe senkrecht auf der Hauptnormalebene stand), um seine y-Axe gedreht, bis seine z-Axe in die Richtung AN der Normale zur Oberfläche des Krystalls gelangt ist und dann seine x-Axe nothwendig in der auf dieser Normale senkrechten Ebene, also in der Oberfläche der Krystallplatte liegt, wenn diese eben ist; und bezeichnen x' , y' , z' die Coordinaten an diesem veränderten Coordinatensysteme von demselben Punkte, der an dem vorigen Coordinatensysteme die x , y , z hatte, so ist nach den bekannten Gesetzen solcher Coordinatenänderungen:

$$x = x' \sin. a + z' \cos. a, \quad y = y', \quad z = z' \sin. a - x' \cos. a,$$

weil der Winkel, den die neuen x- und z-Axen mit den alten machen, $90^\circ - a$ ist. Stellen ξ_e , η_e , ζ_e die Coordinaten an dem so veränderten Systeme von dem Punkte vor, der an dem vorigen die ξ_e , η_e , ζ_e hatte, so ist aus dem gleichen Grunde:

$$\xi_e = \xi'_e \sin. a + \zeta'_e \cos. a, \quad \eta_e = \eta'_e, \quad \zeta_e = \zeta'_e \sin. a - \xi'_e \cos. a,$$

setzt man aber die hier für ξ_e , η_e , ζ_e gegebenen Werthe in die Gleichungen (13. c) der vorigen Ziffer, so werden diese mit Beibehaltung der daselbst befindlichen Bezeichnung (13. a):

$$\left. \begin{aligned} \eta'_e &= \pm \frac{v''^2}{v} \sin. \omega \sin. i \\ \text{und} \quad \xi'_e m^2 &= \frac{v''^2 v'^2}{v} \sin. i \cos. \omega - \zeta'_e (v''^2 - v'^2) \sin. a \cos. a, \end{aligned} \right\} (1)$$

und die in voriger Ziffer erhaltene Gleichung (9) wird jetzt:

$$\frac{(\xi'_e \cos. a + \xi_e \sin. a)^2}{v'^2} + \frac{\eta'^2_e}{v'^2} + \frac{(\xi'_e \sin. a - \xi_e \cos. a)^2}{v''^2} = 1$$

und gibt, wenn man in sie für η'_e und ξ'_e ihre in (1) stehenden Werthe einsetzt, nach mehreren Reductionen unter Beiziehung der Gleichung (13. a) in voriger Ziffer:

$$(2) \quad \xi'_e = m^2 - \frac{v''^2}{v^2} m^2 \sin^2. i + \frac{v''^2}{v^2} (v''^2 - v'^2) \sin^2. a \cos^2. \omega \sin^2. i.$$

Setzt man in diesen Gleichungen $v'' = v'$, so geben sie die Coordinaten des Punktes, wo der gewöhnliche Strahl seine Wellenfläche durchbricht, welche wir durch ξ_0 , η_0 , ζ_0 bezeichnen werden, so dass man hat:

$$(3) \quad \left\{ \begin{array}{l} \eta'_0 = \pm \frac{v'^2}{v} \sin. \omega \sin. i, \quad \xi'_0 = \frac{v'^2}{v} \cos. \omega \sin. i \\ \text{und} \quad \zeta_0^2 = v'^2 (1 - \frac{v'^2}{v^2} \sin^2. i). \end{array} \right.$$

In der ersten Gleichung (1) sowohl als (3) ist von dem doppelten Vorzeichen das obere oder untere zu nehmen, je nachdem A $\mathfrak{S}$ und AY' auf einerlei oder auf verschiedenen Seiten von der Hauptnormalebene liegen.

Die in gegenwärtiger Ziffer gefundenen Gleichungen benutzen wir nun, um die Differenz der Phasen zu bestimmen, welche der aussergewöhnliche und der gewöhnliche Lichtstrahl nach ihrem Durchgange durch einen einaxigen Krystall mit ebenen und parallelen Oberflächen hindurch annehmen. Zu diesem Ende stelle MNPQ (Fig. 2) die Ansicht von einer derartigen Krystallplatte vor, auf welche der einem ebenen Wellenzuge angehörige Lichtstrahl JA fällt, dessen Richtung innerhalb der Platte die A $\mathfrak{S}$ ist, und dieser spalte sich im Innern der Platte in den gewöhnlichen Strahl AO und in den ungewöhnlichen AE; durch den Punkt E ziehe man die EA' parallel mit OA und die A'J' parallel mit AJ, so werden, wenn JA und J'A' Strahlen eines ebenen Wellenzuges vorstellen, der aussergewöhnliche Theil AE des erstern und der gewöhnliche Theil A'E des andern bei E zusammentreffen und von hier aus mit einander in einer der A $\mathfrak{S}$ parallelen Richtung fortlau-

fen und es ist der Phasenunterschied der so mit einander fortlaufenden beiderlei Strahlen aufzusuchen. Legt man durch A' senkrecht auf die Richtung des ebenen Wellenzuges eine Ebene, welche den Strahl JA im Punkte p schneidet, so befinden sich die beiden Strahlen JA und $J'A'$ bei p und A' zur gleichen Zeit in einerlei Phase dem Begriff des ebenen Wellenzuges gemäss. Der eine auf aussergewöhnlichem Wege durch den Krystall dringende Theil legt von p bis A den Weg pA in der Luft zurück und beschreibt auf dieser Strecke $\frac{pA}{v}$ Wellen, wenn v die Wellenlänge in der Luft ist, ferner von A bis E $\frac{AE}{e}$ Wellenlängen, wenn e die Wellenlänge des aussergewöhnlichen Lichtes in der Richtung AE ist; der auf gewöhnlichem Wege durch den Krystall von A' bis E gehende Theil beschreibt auf dieser Strecke $\frac{A'E}{v'}$ oder $\frac{AO}{v'}$ Wellen, wenn v' die Wellenlänge des gewöhnlichen Lichtes ist *). Nun ist aber pA der Unterschied zwischen den senkrechten Projectionen der Strecken $A'E$ oder AO und AE auf die Richtung $A\mathfrak{S}$, also $AO \cos. \mathfrak{S}AO - AE \cos. \mathfrak{S}AE$ und deshalb der Phasenunterschied zwischen den auf ungewöhnlichem und auf gewöhnlichem Wege durch den Krystall hindurch gegangenen Lichtantheile

$$\frac{AO}{v} \cos. \mathfrak{S}AO - \frac{AE}{v} \cos. \mathfrak{S}AE + \frac{AE}{e} - \frac{AO}{v'}.$$

Die Fig. 2, an der wir dieses Resultat erhalten haben, nimmt zwar an, dass der aussergewöhnliche Strahl stärker gebrochen wird, als der gewöhnliche, wie bei positiv einaxigen Krystallen geschieht; wenn aber

*) Es sind zwar v , e und v' nicht die Wellenlängen selber, aber doch ihnen proportional, deshalb können hier diese Wellenlängen durch jene Geschwindigkeiten vertreten werden, wenn man sich die Dicken der Platten in demselben Verhältniss abgeändert denkt. Bezeichnet nämlich τ die dem Lichte zum Durchlaufen einer Welle in irgend einer Richtung erforderliche Zeit, so sind $v\tau$, $v'\tau$, $e\tau$ die dabei zurückgelegten Wege.

auch der umgekehrte Fall bei negativ einaxigen Krystallen eintritt, wie in Fig. 3, so sind jetzt, wenn wir durch A senkrecht auf die Richtung des ebenen Wellenzuges eine Ebene legen, die den Strahl J'A' in p trifft, A und p Stellen gleicher Phase und der ungewöhnliche Strahl geht von A nach E und beschreibt auf diesem Wege $\frac{AE}{v}$ Wellen, der gewöhnliche Strahl dagegen kommt von p über A' nach E und legt den Weg pA' in der Luft, den A'E oder AO im Krystall auf gewöhnliche Weise zurück, $\frac{pA'}{v}$ nebst $\frac{AO}{v}$ Wellenlängen beschreibend, und es ist hier $pA' = AE \cos. EA\mathfrak{Z} - AO \cos. OA\mathfrak{Z}$; mithin ist der Phasenunterschied zwischen dem auf ungewöhnlichem und dem auf gewöhnlichem Wege den Krystall durchlaufenden Lichte:

$$\frac{AE}{v} - \frac{AO}{v} = \frac{AE}{v} \cos. EA\mathfrak{Z} + \frac{AO}{v} \cos. OA\mathfrak{Z},$$

folglich genau der gleiche wie zuvor. Hieraus sieht man, dass der Phasenunterschied stets dasselbe Vorzeichen behält, der Krystall mag ein positiver oder negativer seyn; es ändert sich nur dann das Vorzeichen ab, wenn einmal die Anzahl der Wellen des gewöhnlichen Lichts von der des aussergewöhnlichen und ein andermal letztere von der erstern abgezogen wird.

Nun bildet die Richtung AE mit unsern jetzigen Coordinatenachsen Winkel, deren Cosinuse $\frac{\xi_e}{v}$, $\frac{\eta_e}{v}$, $\frac{\zeta_e}{v}$ sind, und die Richtung AO mit denselben Coordinatenachsen Winkel, deren Cosinuse $\frac{\xi_o}{v}$, $\frac{\eta_o}{v}$, $\frac{\zeta_o}{v}$ sind, stellen daher noch α' , β' , γ' die Winkel vor, welche die Richtung A $\mathfrak{Z}$ mit den gleichen Axen bildet, so ist

$$\cos. EA\mathfrak{Z} = \frac{\xi_e}{v} \cos. \alpha' + \frac{\eta_e}{v} \cos. \beta' + \frac{\zeta_e}{v} \cos. \gamma'$$

und

$$\cos. OA\mathfrak{Z} = \frac{\xi_o}{v} \cos. \alpha' + \frac{\eta_o}{v} \cos. \beta' + \frac{\zeta_o}{v} \cos. \gamma'$$

also wird der gesuchte Phasenunterschied:

$$\frac{AE}{e} \left(1 - \frac{1}{v} (\xi_e \cos. \alpha' + \eta_e \cos. \beta' + \zeta_e \cos. \gamma') \right) - \frac{AO}{v'} \left(1 - \frac{1}{v'} (\xi_o \cos. \alpha' + \eta_o \cos. \beta' + \zeta_o \cos. \gamma') \right);$$

erwägt man aber, dass die in den Richtungen AE und AO liegenden Grössen e und v' bezüglich mit den Coordinaten ξ_e und ξ_o rechtwinkliche Dreiecke bilden, welche denen ähnlich sind, die von den Längen AE und AO und den von den Punkten E und O auslaufenden Dicken der Platte gebildet werden, dass also, wenn wir diese Dicke mit T bezeichnen,

$\xi_e : e = T : AE$ und $\xi_o : v' = T : AO$ ist, woraus man findet:

$$\frac{AE}{e} = \frac{T}{\xi_e} \text{ und } \frac{AO}{v'} = \frac{T}{\xi_o},$$

so erhält man für den gesuchten Phasenunterschied:

$$\frac{T}{\xi_e} \left(1 - \frac{1}{v} (\xi_e \cos. \alpha' + \eta_e \cos. \beta' + \zeta_e \cos. \gamma') \right) - \frac{T}{\xi_o} \left(1 - \frac{1}{v'} (\xi_o \cos. \alpha' + \eta_o \cos. \beta' + \zeta_o \cos. \gamma') \right),$$

oder

$$\frac{T}{\xi_e} \left(1 - \frac{1}{v} (\xi_e \cos. \alpha' + \eta_e \cos. \beta') \right) - \frac{T}{\xi_o} \left(1 - \frac{1}{v'} (\xi_o \cos. \alpha' + \eta_o \cos. \beta') \right).$$

Setzt man in diesen Ausdruck für ξ_e , η_e , ξ_o , η_o ihre aus den Gleichungen (1) und (3) dieser Ziffer entnommenen Werthe, so verwandelt er sich in:

$$\begin{aligned} & \frac{T}{\xi_e} \left[1 - \frac{1}{v} \left(\frac{v'^2 v''^2}{v m^2} \sin. i \cos. \omega \cos. \alpha' \pm \frac{v''^2}{v} \sin. i \sin. \omega \cos. \beta' \right) \right] \\ & + \frac{T}{v} \left(\frac{v'^2 - v''^2}{m^2} \right) \sin. a \cos. a \cos. \alpha' \\ & - \frac{T}{\xi_o} \left[1 - \frac{1}{v'} \left(\frac{v'^2}{v} \cos. \omega \sin. i \cos. \alpha' \pm \frac{v'^2}{v} \sin. \omega \sin. i \cos. \beta' \right) \right] \end{aligned}$$

wo von den doppelten Vorzeichen jedesmal das obere oder untere genommen werden muss, je nachdem die y-Axe mit der Richtung A $\mathfrak{Z}$ auf einerlei oder auf verschiedener Seite von der Hauptnormalebene liegt.

Es lassen sich aber die Winkel α' , β' und γ' ganz auf dieselbe Weise wie in voriger Ziffer die α , β , γ in i und ω auswerthen, wo man dann findet:

$$\cos. \alpha' = \sin. i \cos. \omega, \quad \cos. \beta' = \pm \sin. i \sin. \omega, \quad \cos. \gamma' = \cos. i$$

wobei wieder, wie bisher immer, von dem doppelten Vorzeichen das obere oder untere genommen werden muss, je nachdem die y-Axe und die Richtung A $\mathfrak{Z}$ auf einerlei oder auf verschiedener Seite von der Hauptnormalebene liegt. Mittelst dieser Werthe von $\cos. \alpha'$ und $\cos. \beta'$ liefert der vorstehende Ausdruck, wenn wir ihn durch Θ bezeichnen, die folgende Gleichung:

$$(4) \quad \left\{ \begin{aligned} &\Theta = \frac{T}{\zeta_e} \left(1 - \frac{v'^2 v''^2}{v^2 m^2} \sin^2 i \cos^2 \omega - \frac{v''^2}{v^2} \sin^2 i \sin^2 \omega \right) \\ &+ T \frac{v''^2 - v'^2}{v m^2} \sin. a \cos. a \sin. i \cos. \omega - \frac{T}{\zeta_o} \left(1 - \frac{v''^2}{v^2} \sin^2 i \right), \end{aligned} \right.$$

in welcher jetzt die doppelten Vorzeichen wieder verschwunden sind.

Um diese noch streng richtige Gleichung in eine für die verschiedenen Anwendungen bequemere Form zu bringen, beachte man, dass die in laufender Ziffer enthaltene Gleichung (2) bis auf vierte Potenzen von $\sin i$ genau gibt:

$$\frac{1}{\zeta_e} = \frac{1}{m} + \frac{1}{2} \left(\frac{v''^2}{v^2 m} - \frac{v'^2 (v''^2 - v'^2)}{v^2 m^3} \sin^2 a \cos^2 \omega \right) \sin^2 i,$$

oder, wenn man berücksichtigt, dass

$$m^2 = v''^2 \sin^2 a + v'^2 \cos^2 a = (v''^2 - v'^2) \sin^2 a + v'^2$$

ist und also

ist: $(v''^2 - v'^2) \sin^2 a = m^2 - v'^2$
 $\frac{1}{\xi'_e} = \frac{1}{m} + \frac{1}{2} \sin^2 i \left(\frac{v''^2}{v^2 m} \sin^2 \omega + \frac{v''^2 v'^2}{v^2 m^3} \cos^2 \omega \right).$

Ebenso gibt die dritte der Gleichungen (3) bis auf vierte Potenzen von $\sin i$ genau:

$$\frac{1}{\xi'_0} = \frac{1}{v'} + \frac{1}{2} \frac{v''^2}{v^2} \sin^2 i, \quad (7)$$

und mittelst dieser beiden für $\frac{1}{\xi'_e}$ und $\frac{1}{\xi'_0}$ erhaltenen Werthe verwandelt

sich die Gleichung (4) bis auf vierte Potenzen von $\sin i$ genau in:

$$(5) \quad \Theta = T \left[\frac{1}{m} - \frac{1}{v'} + \frac{v''^2 - v'^2}{v^2 m^2} \sin a \cos a \sin i \cos \omega + \frac{1}{2} \sin^2 i \left(\frac{v'}{v^2} - \frac{v''^2}{v^2 m} \sin^2 \omega - \frac{v'^2 v''^2}{v^2 m^3} \cos^2 \omega \right) \right],$$

in der jedoch der letzten Note gemäss T in Verhältniss von $1 : \tau$ vergrössert, d. h. in den Wellenlängen des Lichts in der Luft gemessen gedacht werden muss. Wir wollen nun diese ganz allgemeine Gleichung auf einige besondere Fälle in Anwendung bringen.

1) Setzen wir *erstlich*, um die allgemeinen Gleichungen (1), (2) und (5) auf besondere Fälle anzuwenden, $a = 0$, wo dann $\sin a = 0$ und $\cos a = 1$, somit $m = v'$ wird, so finden wir aus ihnen:

$$(6) \quad \left\{ \begin{array}{l} \xi'_e = \frac{v''^2}{v} \sin i \cos \omega, \quad \eta'_e = \pm \frac{v''^2}{v} \sin \omega \sin i, \\ \xi'_0 = v' \left(1 - \frac{v''^2}{v^2} \sin^2 i \right)^{\frac{1}{2}} \\ \text{und} \\ \Theta = T \cdot \frac{1}{2} \sin^2 i \frac{v'^2 - v''^2}{v^2 v'} \end{array} \right. \quad (8)$$

woraus sich die, auf Luft reducirte Differenz der Wege zwischen dem aussergewöhnlichen und dem gewöhnlichen Strahle ganz eben so ergibt, wie sie von Airy in dessen Mathematical-Tracts für senkrecht auf die optische Axe geschnittene Platten gefunden worden ist (3. Aufl. pag. 360.)

2) Setzen wir *zweitens* $a = 90^\circ$, wo dann $\cos. a = 0$ und $\sin. a = 1$, folglich $m^2 = v''^2$ wird, was auf parallel mit der optischen Axe geschnittene Platten seine Anwendung findet, so werden in Bezug auf solche Platten die Gleichungen (1) und (2):

$$(7) \left\{ \begin{array}{l} \xi'_e = \frac{v'^2}{v} \sin. i \cos. \omega, \quad \eta'_e = \pm \frac{v''^2}{v} \sin. i \sin. \omega, \\ \zeta'_e = v''^2 \left(1 - \sin^2. i \left(\frac{v''^2}{v^2} \sin^2. \omega + \frac{v'^2}{v^2} \cos^2. \omega \right) \right) \\ \text{während die Gleichung (5) liefert:} \\ \Theta = T \left[\frac{1}{v''} - \frac{1}{v'} + \frac{1}{2} \sin^2. i \left(\frac{v'}{v^2} - \frac{v''}{v^2} \sin^2. \omega - \frac{v'^2}{v^2 v''} \cos^2. \omega \right) \right], \end{array} \right.$$

welche Formeln mit den von J. Müller in Poggendorff's Annalen (XXXIII. p. 288 und 291) angegebenen, bis auf den Umstand übereinstimmen, dass dort in Θ das mit $\sin^2. i$ behaftete Glied das dreifache von dem hier gegeben ist, ausserdem haben die übrigen in Θ enthaltenen Glieder die umgekehrten Vorzeichen der hier stehenden.

3) Setzen wir *drittens* $a = 45^\circ$, welcher Fall bei Platten eintritt, deren Oberflächen einen Winkel von 45° mit der optischen Axe machen, so wird in diesem Falle $\sin^2. a = \cos^2. a = \frac{1}{2}$, und in Folge dieser Werthe ergibt sich $m^2 = \frac{v''^2 + v'^2}{2}$, wesshalb die Gleichungen (1) und (2) liefern:

$$(8) \left\{ \begin{array}{l} \eta'_e = \pm \frac{v''^2}{v} \sin. \omega \sin. i, \\ \xi'_e = \frac{v'^2 v''^2}{v'^2 + v''^2} \cos. \omega \sin. i - \frac{v''^2 - v'^2}{v'^2 + v''^2} \xi_e \sin. a \cos. a \\ \text{und} \\ \zeta'_e = \left(\frac{v'^2 + v''^2}{2} - \frac{v'^2 + v''^2}{2} \cdot \frac{v''^2}{v^2} \sin^2. i \right. \\ \left. + \frac{1}{2} (v''^2 - v'^2) \frac{v''^2}{v^2} \cos^2. \omega \sin^2. i \right)^{\frac{1}{2}}, \end{array} \right.$$

in denen $\sin. a \cos. a = \frac{1}{2}$ ist. Die Gleichung (5) hingegen gibt im gegenwärtigen Falle:

$$\Theta = T \left[\frac{1}{\sqrt{\frac{v'^2 + v''^2}{2}}} - \frac{1}{v'} + \frac{v''^2 - v'^2}{v'^2 + v''^2} \sin. a \cos. a \cos. \omega \sin. i \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \sin^2. i \left(\frac{v'}{v^2} - \frac{v''^2}{v^2 \left(\frac{v'^2 + v''^2}{2} \right)^{\frac{1}{2}}} \sin^2. \omega - \frac{v'^2 v''^2}{v^2 \left(\frac{v'^2 + v''^2}{2} \right)^{\frac{1}{2}}} \cos^2. \omega \right) \right] \quad (9)$$

in der man ebenfalls $\sin. a \cos. a = \frac{1}{2}$ zu setzen hat. Vergleicht man diese Formeln mit denen von J. Müller für den gleichen Fall (Poggendorffs Annalen XXXV. pag. 102 und 104) angegebenen, so überzeugt man sich, dass diese sämmtlich mit den unsrigen in der Hauptsache übereinstimmen, wenn man bedenkt, dass unser ξ_e auch in der Form

$$\xi_e = \left[\frac{v'^2 + v''^2}{2} - \sin^2. i \left(\frac{v'^2 + v''^2}{2} \frac{v''^2}{v^2} \sin^2. \omega + \frac{v'^2 v''^2}{v^2} \cos^2. \omega \right) \right]^{\frac{1}{2}}$$

gegeben werden kann und dass Müller schon die zweiten Potenzen von $\sin. i$ vernachlässigt hat. Das erste Glied von ξ_e in (8) hat Müller nur halb so gross als wir, und von dem letzten Gliede des für ξ_e^2 aufgestellten Ausdrucks hat Müller nur den vierten Theil, ausserdem ist alles gleich. *)

*) Ich habe hier Anzeige gemacht von allen den Abweichungen, auf die ich gestossen bin, weil unsere Literatur in diesem Felde noch wenig Controlle aufzuweisen hat, und Fehler in den Formeln Ursache von viel unnützem Zeitverlust werden können, wovon ich selber ein Zeuge bin, wie ich später noch berichten werde. Ich bin in meinem Leben nie auf eine Rechnung gestossen, die, auf gleich einfachen Grundlagen ruhend wie diese, so viele Quellen zu Irrungen in sich birgt. Auch würde ich noch in diesem Augenblicke den von mir erhaltenen Resultaten kein volles Zutrauen schenken, hätte ich nicht das Glück gehabt, von einem meiner eifrigsten Zuhörer, Herr Jacob Pfeiffer aus Fürth, in der Art unterstützt zu werden, dass derselbe die ganze Rechnung auf mein Ersuchen selbstständig durchführte und zugleich noch so lange revidirte, bis wir beide, unabhängig von einander, in keinem Puncte mehr abweichende Ergebnisse fanden.

(8) In der Folge werden wir die Gleichung (5) zur Abkürzung stets so schreiben:

$$(10. a) \quad \Theta \cdot \frac{v}{T} = C + D \sin. i \cos. \omega + B \sin^2. i \sin^2. \omega + A \sin^2. i \cos^2. \omega$$

indem wir setzen:

$$(10. b) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{v}{m} - \frac{v'}{v} = C, \quad \frac{1}{2} \frac{v''^2 - v'^2}{m^2} \sin. 2a = D, \\ \frac{1}{2} \left(\frac{v'}{v} - \frac{v''^2}{vm} \right) = B, \quad \frac{1}{2} \left(\frac{v'}{v} - \frac{v'^2 v''^2}{vm^3} \right) = A, \end{array} \right.$$

wobei es eine besondere Beachtung verdient, dass die Grössen C, D, B, A blos von dem Verhältniss derer v , v' , v'' zu einander und keineswegs von den absoluten Werthen dieser Geschwindigkeiten abhängig sind, wie man sogleich gewahr wird, wenn man sich erinnert, dass man hat:

$$m^2 = v''^2 \sin^2. a + v'^2 \cos^2. a.$$

Es ist allerdings wahr, dass in den Gleichungen (5) bis (9) die vierten und höhern Potenzen von $\sin. i$ vernachlässigt worden sind, wesshalb diese nicht mehr volle Genauigkeit geben können; allein bedenkt man, dass bei den Versuchen mit solchen Platten kaum je ein Gesichtsfeld von 10 Graden vorhanden ist, dass also bei ihnen $\sin. i$ noch bedeutend kleiner als 0, 1, so überzeugt man sich, dass $\sin^4. i$ den Werth 0,0001 noch lange nicht erreicht und das Glied, worin $\sin^4. i$ vorkommt, keinen irgend wie in die Sinne fallenden Einfluss auf die aus unsern Gleichungen hervorgehenden Erscheinungen ausüben kann, auf so lange wenigstens, als nicht der Coefficient von $\sin^4. i$ die von $\sin^2. i$ und $\sin. i$ mehrfach übertrifft.

VIII. Obgleich das durch Platten eines einaxigen Krystalls hindurch gegangene gewöhnliche und aussergewöhnliche Licht, nachdem es wieder in die Luft getreten ist, in parallelen Richtungen fortläuft und im Allgemeinen wenigstens, wie unsere Rechnung zeigt, einen Phasenun-

terschied von bestimmter Grösse annimmt, sohin zwei von den zur Interferenz des Lichtes erforderlichen Bedingungen in sich trägt, so kann es doch Interferenzerscheinungen noch nicht zu Stande bringen, weil die Schwingungsrichtungen der beiderlei Lichtportionen auf einander senkrecht stehen (vergl. III.); es sei denn, dass man beide Lichtbündel dahin bringe, dass sie ihre Schwingungen in derselben Richtung vollführen. Dieser Zweck wird dadurch erreicht, dass man alles Licht sowohl vor seinem Eintritt in die Krystallsplatte, als auch nach seinem Austritte aus derselben polarisirt, d. h. unter Umstände versetzt, wobei es alle seine Schwingungen in einer und derselben Richtung auszuführen gezwungen wird; hierbei werden wir die Vorkehrung, wodurch es vor seinem Eintritt in die Platte polarisirt wird, das *vordere* Polarisationsmittel, hingegen die Vorkehrung, wodurch es nach seinem Austritt aus der Platte auf's Neue polarisirt wird, das *hintere* Polarisationsmittel nennen. Wir werden nun die unter solchen Umständen stattfindenden Hergänge möglichst genau zu bestimmen suchen.

Ist das auf den Krystall einfallende Licht polarisirt, und denkt man sich durch dessen Schwingungsrichtung eine Ebene senkrecht auf den Hauptschnitt des Krystalls gelegt, so lässt sich eine in der Schwingungsrichtung vor sich gehende Bewegung jedesmal zerlegen in eine, welche längs des Durchschnitts dieser Ebene mit dem Hauptschnitt geschieht und das liefert, was man den aussergewöhnlichen Theil des Lichts zu nennen pflegt, und in eine zweite, welche in derselben, durch die Schwingungsrichtung senkrecht zum Hauptschnitt gelegten Ebene geschieht, aber senkrecht zu dem eben genannten Durchschnitt ist, und daher auch senkrecht zum Hauptschnitt des Krystalls, welche letztere Bewegung den sogenannten gewöhnlichen Theil des Lichts liefert. Stellen nun (Fig. 4) AP_1 , AH, AP_2 aneinander hängende Ebenen vor, und zwar AH den einem bestimmten einfallenden Lichtstrahle entsprechenden Hauptschnitt, AP_1 die vordere, AP_2 die hintere Polarisations-

ebene, welche vom Hauptschnitt in den Richtungen AD_1 und AD_2 durchschnitten werden, und sind AS , AR_1 und AR_2 bezüglich die auf diesen Ebenen senkrechten Richtungen, wobei wir voraussetzen, dass alle drei in den hohlen Winkel zwischen den beiden Polarisations Ebenen hinein laufen; stellt ferner $a \sin. 2\pi \left(\frac{vt-x}{\lambda} \right)$ die Schwingungsweise des auf die Platte vom vordern Polarisationsmittel gelangenden Lichts längs der Richtung AR_1 vor, und φ_1 den Winkel, welchen die Richtungen AR_1 und AS mit einander machen und der kein anderer ist als der Aussenwinkel der Ebenen AP_1 und AH in unserer Figur, so ist

$$(1. a) \quad a \cos. \varphi_1 \sin. 2\pi \frac{vt-x}{\lambda}$$

offenbar der Antheil des im Krystall sich bildenden gewöhnlichen Lichts, und legt man durch AR_1 und AS eine Ebene, welche die Ebenen AP_1 und AH in den Richtungen AP'_1 und AH' schneidet, so ist

$$(1. b) \quad a \cos. \varphi'_1 \sin. 2\pi \frac{vt-x}{\lambda}$$

der an der Vorderfläche der Krystallplatte hervortretende Antheil von aussergewöhnlichem Lichte, wenn φ'_1 den Winkel bezeichnet, welchen die Richtung AH' mit der AR_1 macht. Diese zwei Lichtantheile setzen ihre Bewegung im Krystall mit ungleichen Geschwindigkeiten fort, weshalb die Phasen beider auseinander gehen, und es lässt sich dieser Phasenunterschied mittelst der in Ziffer VII. gefundenen Gleichung (5) für jegliche Tiefe erhalten, bis zu welcher das Licht in den Krystall eingedrungen ist. Bezeichnet auch hier wieder Θ den Phasenunterschied, um den die Bewegungsweise im aussergewöhnlichen Lichte der im gewöhnlichen an der hintern Fläche der Krystallplatte zuvor gekommen ist, so kann man an dieser zweiten Fläche die Bewegungsweise des gewöhnlichen Lichts, welche längs AS vor sich geht, durch

$$(2. a) \quad a \cos. \varphi_1 \sin. 2\pi \frac{vt-x}{\lambda}$$

und die des aussergewöhnlichen Lichts, welches längs AH' schwingt, durch

$$a \cos. \varphi'_1 \sin. 2\pi \left(\frac{vt-x}{\lambda} + \Theta \right) \quad (2. 6)$$

darstellen, weil man im erstern die Phase nach Belieben nehmen kann, da diess blos einer Fixirung der, beiden Lichtantheilen gemeinschaftlichen Distanzebene gleich kommt.

Der Winkel φ'_1 oder $H'AR_1$ lässt sich durch den φ_1 ersetzen. Weil nämlich die durch AR_1 und AS gelegte Ebene, welche die vordere Polarisationsebene in der Richtung AP'_1 und den Hauptschnitt der Platte in der AH' schneidet, sowohl senkrecht auf der vordern Polarisationsebene, als auch auf dem Hauptschnitt steht, somit auch senkrecht auf dem Durchschnitt dieser zwei letzten Ebenen, so bilden die Richtungen AH' und AP'_1 den Neigungswinkel zwischen der vordern Polarisationsebene und dem Hauptschnitt; es ist also $H'AP'_1 = 180^\circ - \varphi_1$, wenn man sich unter den Richtungen AH' und AP'_1 die denkt, auf welche man von AS und AR_1 aus über den Winkel SAR_1 weg zuerst stösst. Bei der gleichen Annahme ist aber der Winkel $H'AR_1$ oder φ'_1 entweder $90^\circ - \varphi_1$ oder $\varphi_1 - 90^\circ$ und man hat daher in jedem Falle

$$\cos. \varphi'_1 = \sin. \varphi_1, \quad (3. a)$$

so dass man die Ausdrücke (2. a) und (2. b.) auch so schreiben kann:

$$a \cos. \varphi_1, \sin. 2\pi \frac{vt-x}{\lambda} \quad (3. b)$$

längs AS schwingend, und

$$a \sin. \varphi_1 \sin. 2\pi \left(\frac{vt-x}{\lambda} + \Theta \right) \quad (3. c)$$

längs AH' schwingend.

Der längs der Richtung AS schwingende Antheil (3. b) gelangt nach seinem Austritt aus der Platte an das hintere Polarisationsmittel, dessen Polarisationsebene AP_2 ist, so wie AR_2 die Normale zu letzterer Ebene, und wird hier wieder in zwei Antheile zerlegt, von denen der eine seine Schwingungen längs AR_2 vollbringt und von dem Po-

larisationsmittel aus ins Auge gelangt; der andere hingegen vollbringt seine Schwingungen längs der Polarisationsebene AP_2 und geht im Polarisationsmittel verloren. Der erstere wirksame Antheil nun hat die Schwingungsweise

$$(4. a) \quad a \cos. \varphi_1 \cos. \varphi_2 \sin. 2\pi \frac{vt - x}{\lambda}$$

längs der Richtung AR_2 , wenn φ_2 den Winkel SAR_2 bezeichnet, welcher Winkel kein anderer ist, als der Aussenwinkel der Ebenen AH und AP_2 in unserer Figur. Der in der Richtung AH' schwingende Antheil (3. c) gelangt ebenfalls an das hintere Polarisationsmittel und wird hier ebenfalls in zwei Antheile zerlegt, von denen der eine seine Schwingungen längs AR_2 vollbringt und in's Auge kommt, der andere längs AP_2 und hier untergeht. Der erste wirksame von diesen beiden Antheilen hat die Schwingungsweise

$$(4. b) \quad a \sin. \varphi_1 \cos. \varphi'_2 \sin. 2\pi \left(\frac{vt - x}{\lambda} + \odot \right)$$

längs der Richtung AR_2 , wenn φ'_2 den Winkel bezeichnet, den die Richtung AH' mit der AR_2 bildet.

Der Winkel $H'AR_2$ oder φ'_2 lässt sich auf den φ_2 zurückführen. Da nämlich eine durch AR_2 und AS gelegte Ebene, welche die hintere Polarisationsebene und den Hauptschnitt in den Richtungen AP'_2 und AH'' schneidet auf den beiden eben genannten Ebenen senkrecht steht, somit auch senkrecht auf deren Durchschnittslinie, so liefern die Richtungen AP'_2 und AH'' den Neigungswinkel zwischen der hintern Polarisationsebene und dem Hauptschnitt und es ist $H''AP'_2 = 180^\circ - \varphi_2$, wenn man sich unter den Richtungen AH'' und AP'_2 die denkt, auf welche man von AS und AR_2 aus über den Winkel SAR_2 weg zuerst stösst. Bei der gleichen Annahme wird aber auch $H''AR_2$ entweder $90^\circ - \varphi$ oder $\varphi_2 - 90^\circ$, so dass in jedem Falle

$$(5. a) \quad \cos. H''AR_2 = \sin. \varphi_2$$

ist; fasst man daher das aus den Richtungen AH' AH'' und AR_2 gebildete sphärische Dreieck in's Auge, in welchem $H'AR_2 = \varphi'_2$, $H''AR_2 = 90^\circ - \varphi_2$ oder $\varphi_2 - 90^\circ$ ist, und der Seite φ'_2 steht ein rechter Flächenwinkel gegenüber, weil die Ebene $H''AR_2$ durch AS hindurch geht und deswegen senkrecht auf der im Hauptschnitt liegenden Ebene $H'AH''$ steht, so gibt die sphärische Trigonometrie, wenn die Seite $H'AH''$ durch χ bezeichnet wird, die folgende Relation an die Hand:

$$\cos. \varphi'_2 = \cos. \chi \sin. \varphi_2, \quad (5. b)$$

und hierdurch nehmen die Antheile (4. a) und (4. b) die folgende Gestalt an:

$$a \cos. \varphi_1 \cos \varphi_2 \sin. 2\pi \frac{vt - x}{\lambda} \quad (5. c)$$

und

$$a \sin. \varphi_1 \sin. \varphi_2 \cos. \chi \sin. 2\pi \left(\frac{vt - x}{\lambda} + \Theta \right) \quad (5. d)$$

beide ihre Schwingungen längs AR_2 vollführend. In Betreff des Winkels χ ist zu bemerken, dass er der Neigungswinkel zwischen den Ebenen R_1AS und R_2AS ist, weil beide auf dem Hauptschnitt senkrecht stehen und diesen in den Richtungen AH' und AH'' schneiden, und da die Ebenen R_1AS und R_2AS zugleich auch auf den Durchschnittslinien AD_1 und AD_2 , welche die beiden Polarisations Ebenen mit dem Hauptschnitt liefern, senkrecht stehen, so folgt, dass durch den Winkel χ auch der D_1AD_2 gegeben ist, den diese Durchschnittslinien unter sich einschliessen, und umgekehrt.

Da die zuletzt erhaltenen Lichtantheile (5. c) und (5. d) beide ihre Schwingungen längs derselben Geraden AR_2 vollbringen und den Phasenunterschied Θ in sich tragen, so setzen sich dieselben auf die in Ziffer V. angezeigte Art durch Interferenz zu einem einzigen Wellenzug zusammen, dessen Lichtstärke nach Anleitung der dort erhaltenen Gleichung $a^2 = a_1^2 + a_2^2 + 2a_1a_2 \cos. 2\pi(\delta_1 - \delta_2)$ gefunden wird. So gelangt man zu der Gleichung:

$$A^2 = a^2 [\cos^2 \varphi_1 \cos^2 \varphi_2 + \sin^2 \varphi_1 \sin^2 \varphi_2 \cos^2 \chi + 2 \sin \varphi_1 \cos \varphi_1 \sin \varphi_2 \cos \varphi_2 \cos \chi \cos 2\pi\Theta],$$

in welcher A^2 diese Lichtstärke bezeichnet, und die sich zunächst in die andere Form überführen lässt:

$$(6. a) \quad A^2 = a^2 [(\cos \varphi_1 \cos \varphi_2 + \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 \cos \chi)^2 - \sin 2\varphi_1 \sin 2\varphi_2 \cos \chi \sin^2 \pi\Theta],$$

zuletzt aber dadurch, dass man $\cos \varphi_1 \cos \varphi_2 + \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 \cos \chi = \cos A$ setzt, wird:

$$(6. b) \quad A^2 = a^2 (\cos^2 A - \sin 2\varphi_1 \sin 2\varphi_2 \cos \chi \sin^2 \pi\Theta).$$

Um die Bedeutung des Winkels A in dieser letzten Gleichung völlig klar aufzufassen, gehen wir von dem aus den drei Richtungen AD_1 , AD_2 und AP_0 (Fig. 4) gebildeten sphärischen Dreieck aus, in welchem die Seiten D_1AP_0 und D_2AP_0 mit dem Hauptschnitt D_1AD_2 die Winkel φ_1 und φ_2 bilden, weil diese Winkel den frühern Bestimmungen gemäss die Aussenwinkel derjenigen sind, welche die beiden Polarisationssebenen mit dem Hauptschnitt in unserer Figur machen; bezeichnen wir daher die Seite D_1AD_2 mit χ und den aus den Seiten D_1AP_0 und D_2AP_0 gebildeten Flächenwinkel in dem gleichen Dreikant mit A , so gibt die sphärische Trigonometrie folgende Relation zwischen diesen Stücken an die Hand:

$$\cos A = \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 \cos \chi - \cos \varphi_1 \cos \varphi_2.$$

Gehen wir nun von diesem Dreikant zu dem über, welches aus ihm durch Verlängerung von einer der Richtungen AD_1 oder AD_2 nach der entgegengesetzten Seite hin hervorgeht, so bleiben in diesem Nebendreikant die Winkel φ_1 und φ_2 die gleichen, aber an die Stelle der Winkel χ und A treten in ihm die $180^\circ - \chi$ und $180^\circ - A$. Setzt man nun in die vorstehende Gleichung diese letztern Winkel an die Stelle derer χ und A , so wird sie:

$\cos. A = \sin. \varphi_1 \sin. \varphi_2 \cos. \chi + \cos. \varphi_1 \cos. \varphi_2$,
 und gibt damit zu verstehen, dass A in der Gleichung (6. b) den Winkel bedeutet, der in diesem Nebendreikant dem Hauptschnitt gegenüber liegt, den Aussenwinkel nämlich der beiden Polarisations Ebenen in unserer Figur. Man kann immer die Figur auch so einrichten, dass statt eines der Winkel φ_1 und φ_2 sein Nebenwinkel und zugleich auch statt χ dessen Nebenwinkel in ihr auftritt, dann wird

$$\cos. A = \sin. \varphi_1 \sin. \varphi_2 \cos. \chi + \cos. \varphi_1 \cos. \varphi_2,$$

es geht also selbst mittelst dieser neuen Winkel die Gleichung (6. a) doch noch in die (6. b) über. Hieraus folgt, dass man sich χ in der Gleichung (6. b) immer als spitzen Winkel denken darf. Uebrigens will ich hier bemerken, dass diese Darstellungsweise einige Härten hat und nur deswegen gewählt worden ist, weil sie von den Optikern am öftesten gebraucht wurde. In der zweiten Hälfte dieser Abhandlung werde ich eine andere mittheilen, die von derlei Uebelständen völlig frei ist.

So einfach die zuletzt erhaltene Gleichung auch ist, so besitzen doch die in ihr auftretenden Winkel φ_1 , φ_2 und χ einen zu geringen Grad der Anschaulichkeit, als dass wir nicht wünschen müssen, sie durch andere minder wechselnde zu ersetzen. Indem wir jetzt die zu diesem Zwecke erforderlichen allgemeinen Formeln aufstellen, machen wir an den Apparat, womit die in den Krystallplatten entstehenden Interferenzerscheinungen beobachtet werden, mehr der grössern Bestimmtheit halber als aus Gründen der Einfachheit, die Anforderung, dass die beiden Polarisations Ebenen bei jeder Lage, die ihnen gegeben werden mag, stets eine senkrechte Stellung zur Oberfläche der Krystallplatte behalten, eine Anforderung, die von dem solche Apparate anfertigenden Künstler immer leicht eingehalten werden kann, weil sie damit übereinkommt, dass die Polarisations Ebenen in allen ihren Lagen der Axe des Instruments stets parallel bleiben, was der Fall ist, wenn sie um diese

Axe selber drehbar eingerichtet werden. Stellt nun (Fig. 5.) MM die Oberfläche der Krystallplatte, M'M' den Hauptschnitt vor, welcher zu dem nach hinten verlängerten Lichtstrahl A $\mathfrak{S}$ gehört und in welchem die optische Axe AX der Krystallplatte liegt; stellt ferner AY die Richtung vor, in welcher die durch AX und durch die nach hinten gerichtete Normale AN gelegte Hauptnormalebene die Oberfläche der Krystallplatte schneidet, welche Richtung jene feste ist, an die sich das oben von uns benutzte Polarcoordinatensystem anknüpft, und A $\mathfrak{S}'$ die Richtung, in welcher die Krystalloberfläche von der durch A $\mathfrak{S}$ und AN gelegten Einfallsebene geschnitten wird, so dass YA $\mathfrak{S}'$ das Azimuth der Einfallsebene zur Hauptnormalebene vorstellt, welcher Winkel hier wieder, wie schon oben immer, durch den Buchstaben ω bezeichnet wird; stellen endlich AH' und AO' die Richtungen vor, in welchen der Hauptschnitt und die Oberfläche der Platte von der vordern Polarisationssebene durchschnitten werden, und bezeichnen AH'' und AO'' dasselbe in Bezug auf die hintere Polarisationssebene, so dass der eben getroffenen Einrichtung unsers Apparats gemäss, weil beide Polarisationssebenen, somit auch deren Durchschnittslinie stets senkrecht auf der Oberfläche der Platte stehen bleiben, O'AO'' der Neigungswinkel zwischen diesen beiden Polarisationssebenen ist, dessen Aussenwinkel so eben durch A bezeichnet worden ist. Diesem nach sind O'AY und O''AY die Azimuthe der vordern und hintern Polarisationssebene zur Hauptnormalebene, welche Winkel wir durch ω_1 und ω_2 bezeichnen wollen, so dass man hat:

$$(7. a) \quad \omega_2 - \omega_1 = 180^\circ - A$$

und eben so, wenn wir noch die Winkel H'AZ und H''AZ, welche die beiden Richtungen AH' und AH'' mit der Durchschnittslinie AZ der Ebenen MM und M'M' machen, durch ε_1 und ε_2 bezeichnen, erhält man noch:

$$(7. b) \quad \varepsilon_2 - \varepsilon_1 = \chi;$$

fassen wir jetzt das aus den Richtungen A $\mathfrak{S}$, AX und AN gebildete

sphärische Dreieck in's Auge, in welchem die Seite $NA\mathfrak{Z}$ der Einfallswinkel des in Betrachtung genommenen Lichtstrahls ist, welchen Winkel wir, wie früher immer, durch i bezeichnen werden, die Seite NAX der Winkel, den die Normale zur Platte mit der optischen Axe bildet, und der wie schon oben a heissen mag. Der Flächenwinkel dieses Dreiecks, den die Ebenen $NA\mathfrak{Z}$ und NAX , welche die Plattenoberfläche in den Richtungen $A\mathfrak{Z}$ und AY schneiden, mit einander machen, ist kein anderer als der $\mathfrak{Z}'AY$ oder ω , weil der Durchschnitt AN dieser beiden Ebenen senkrecht auf der genannten Oberfläche steht und also $\mathfrak{Z}'AY$ der Neigungswinkel zwischen jenen Ebenen ist; nennt man daher den Winkel, den die Hauptnormalebene NAX mit dem Hauptschnitt $\mathfrak{Z}AX$ macht, ψ , so gibt die sphärische Trigonometrie sogleich die nachstehende Gleichung an die Hand:

$$\cot. \psi \sin. \omega + \cos. \omega \cos. a = \sin. a \cot. i. \quad (7. c)$$

Legt man in demselben sphärischen Dreieck durch die Normale AN eine Ebene senkrecht auf den Hauptschnitt $\mathfrak{Z}AX$, welche diesen in AG schneidet, so ist NAG der Neigungswinkel der Normale AN zum Hauptschnitt $\mathfrak{Z}AX$ und also das Complement des Winkels, den die auf AN senkrechte Oberfläche der Platte mit dem Hauptschnitt macht, und der ψ' heissen soll. Das aus den Richtungen AG , AN und AX gebildete sphärische Dreieck, welches ein rechtwinkliges ist, weil $G\hat{A}N$ senkrecht auf GAX gelegt worden ist, hat zur einen Cathete $G\hat{A}N$ oder $90^\circ - \psi'$ und dieser steht der Winkel ψ gegenüber, während seine Hypotenusen-seite a ist; es ist daher:

$$\cos. \psi' = \sin. a \sin. \psi. \quad (7. d)$$

In dem aus den Richtungen AY , AX und AZ gebildeten sphärischen Dreieck steht die durch die Normale AN hindurchgehende Seite YAX senkrecht auf der in der Plattenoberfläche liegenden Seite YAZ , und es ist die dem rechten Winkel anliegende Cathetenseite $Y\hat{A}X = 90^\circ - a$, so wie ψ der Winkel, den die Hauptnormalebene YAX mit dem Haupt-

schnitt XAZ macht; stellt daher μ die diesem Winkel gegenüberliegende Cathedenseite YAZ vor und ν die demselben Dreiecke angehörige Hypotenusenuseite, so liefert die sphärische Trigonometrie auf der Stelle:

$$(7. e) \quad \text{tang. } \mu = \cos. a \text{ tang. } \psi \text{ und } \cot. \nu = \text{tang. } a \cos. \psi.$$

Fasst man jetzt das aus den Richtungen AO', AH' und AZ gebildete sphärische Dreieck in's Auge, in welchem die Ebene H'AO' senkrecht auf der O'AZ steht und mit der H'AZ den Winkel φ_1 einschliesst, während die O'AZ mit der H'AZ den Winkel macht, den wir so eben durch ψ' bezeichnet haben, so ist den Regeln der sphärischen Trigonometrie gemäss, weil $O'AZ = O'AY + YAZ$, also den eingeführten Bezeichnungen zur Folge $O'AZ = \omega_1 + \mu$ ist, $\cos. \varphi_1 = \cos. (\omega_1 + \mu) \sin. \psi'$, und eine dieser ganz ähnliche Gleichung liefern auch die Richtungen AO'', AH'' und AZ, so dass man hat, wenn man für ω_2 der Gleichung (7. a) gemäss $\omega_1 + 180^\circ - A$ setzt:

$$(7. f) \quad \cos. \varphi_1 = \cos. (\omega_1 + \mu) \sin. \psi' \text{ und} \\ \cos. \varphi_2 = -\cos. (\omega_1 + \mu + A) \sin. \psi'.$$

Dieselben sphärischen Dreiecke liefern aber auch noch ausserdem, weil ε_1 und ε_2 die Hypotenusenuseiten in ihnen sind:

$$(7. g) \quad \cot. \varepsilon_1 = \cot. (\omega_1 + \mu) \cos. \psi' \text{ und} \\ \cot. \varepsilon_2 = -\cot. (\omega_1 + \mu + A) \cos. \psi'.$$

Die Gleichungen (7. a bis g) setzen in den Stand, alle einzelnen zur vollständigen Nutzbarmachung der Intensitätsgleichung (6. c) etwa nöthigen Nebenumstände kennen zu lernen und wir werden sie jetzt zur Beantwortung der nachstehenden, für alle Interferenzerscheinungen in Krystallplatten hochwichtigen Frage benützen: *Welche Stellung muss der Hauptnormalebene im Polarisationsapparate gegeben werden, wenn der in Betrachtung genommene Lichtstrahl bei einer gegebenen Lage der beiden Polarisations Ebenen zu einander mit der grössten oder kleinsten Helligkeit in's Auge gelangen soll.*

Sehen wir die Lage der Hauptnormalebene zur Polarisationssebene als von der Grösse ω_1 abhängig an, so müssen wir in Folge der Gleichung (7. a), weil wir hier A als constant vorausgesetzt haben, ω_2 als Function von ω_1 ansehen; dann aber folgt aus den Gleichungen (7. f und g), dass auch φ_1 und φ_2 , so wie ε_1 und ε_2 gegebene Functionen von ω_1 sind, und der Gleichung (7. b) gemäss selbst χ . Bekanntlich ist aber die Bedingung des Maximum- oder Minimumwerthes eines Ausdrucks die, dass dessen nach der unabhängig veränderlichen Grösse, hier ω_1 , genommene Ableitung null sein muss, also tritt in Bezug auf die in (6. b) enthaltene Lichtstärke die nachstehende Bedingung ein:

$$0 = (2 \cos. 2\varphi_1 \sin. 2\varphi_2 d\varphi_1 + 2 \cos. 2\varphi_2 \sin. 2\varphi_1 d\varphi_2) \cos. \chi - \sin. 2\varphi_1 \sin. 2\varphi_2 \sin. \chi d\chi, \quad (8)$$

aus welcher Gleichung diejenigen Werthe von ω_1 herzuholen sind, wofür das A^2 der Gleichung (6. c) einen grössten oder kleinsten Werth annimmt.

IX. Von hier ab finden wir uns genöthiget, den Näherungsweg zu betreten, wie diess schon bei Aufstellung der Gleichung (5) in Ziffer VII. geschehen ist, wo alle diejenigen Glieder ausser Acht gelassen worden sind, welche $\sin. i$ in der vierten oder einer noch höhern Potenz in sich enthalten. Obgleich die Bestimmung der Lichtstärke bei weitem nicht den gleichen Grad der Genauigkeit verlangt, so werden wir doch anfänglich blos die Glieder der dritten oder einer höhern Dimension vernachlässigen und erst später zu geringern Annäherungen übergehen. In dieser Weise erhalten wir aus der Gleichung (7. c):

$$\sin. \psi = \frac{\sin. \omega \sin. i}{\sin. a} + \frac{\cos. a}{\sin^2. a} \cos. \omega \sin. \omega \sin^2. i \text{ und}$$

$$\cos. \psi = 1 - \frac{1}{2} \frac{\sin^2. \omega \sin^2. i}{\sin^2. a},$$

hierauf aus der (7. d):

$$\cos. \psi^1 = \sin. \omega \sin. i + \cot. a \cos. \omega \sin. \omega \sin.^2. i, \quad \sin. \psi^1 = 1 - \frac{1}{2} \sin^2. \omega \sin^2. i$$

und nun liefern die Gleichungen (7. g):

$$\sin. \varepsilon_1 = 1 - \frac{1}{2} \cot^2. (\omega_1 + \mu) \sin^2. \omega \sin^2. i \text{ und}$$

$$\cos. \varepsilon_1 = \cot. (\omega_1 + \mu) \sin. \omega \sin. i,$$

so wie:

$$\sin. \varepsilon_2 = 1 - \frac{1}{2} \cot^2. (\omega_1 + \mu - A) \sin^2. \omega \sin^2. i \text{ und}$$

$$\cos. \varepsilon_2 = -\cot. (\omega_1 + \mu - A) \sin. \omega \sin. i;$$

weil aber der Gleichung (7. b) der vorigen Ziffer gemäss

$$\cos. \chi = \cos. (\varepsilon_2 - \varepsilon_1) = \cos. \varepsilon_1 \cos. \varepsilon_2 + \sin. \varepsilon_1 \sin. \varepsilon_2$$

ist, so findet man;

$$\cos. \chi = 1 - \frac{1}{2} \sin^2. \omega \sin^2. i [\cot. (\omega_1 + \mu - A) + \cot. (\omega_1 + \mu)]^2 *)$$

und hieraus ergibt sich durch Ableitung nach ω_1

$$\sin. \chi d\chi = \sin^2. \omega \sin^2. i (\cot. (\omega_1 + \mu) + \cot. (\omega_1 + \mu - A)) \\ \times \left(\frac{1}{\sin^2. (\omega_1 + \mu)} + \frac{1}{\sin^2. (\omega_1 + \mu - A)} \right).$$

Man sieht hieraus, dass im Allgemeinen $\sin. \chi d\chi$ nur eine sehr kleine Grösse der zweiten Ordnung in Bezug auf $\sin. i$ ist, und dass $\cos. \chi$ nur um eine eben so kleine Grösse von der Einheit abweicht; bleiben wir daher bei einer Annäherung des zweiten Grades stehen, d. h. vernachlässigen wir die zweiten Potenzen von $\sin. i$, was für unsere Zwecke noch vollkommen hinreichend ist, so können wir $\sin. \chi d\chi = 0$ und $\cos. \chi = 1$ setzen, wodurch die Gleichungen (6. b) und (8) der vorigen Ziffer werden:

$$(1. a) \quad A^2 = a^2 [\cos^2. A - \sin. 2\varphi_1 \sin. 2\varphi_2 \sin^2. \pi\Theta]$$

*) Diese Form für $\cos. \chi$ setzt zwar voraus, dass χ ein spitzer Winkel sey, eine Voraussetzung, die jedoch stets erfüllt werden kann, worauf schon vorhin (Ziffer VIII.) bei Besprechung der Gleichung (6. b) hingewiesen worden ist.

und

$$0 = \cos. 2\varphi_1 \sin. 2\varphi_2 \cdot d\varphi_1 + \cos. 2\varphi_2 \sin. 2\varphi_1 \cdot d\varphi_2, \quad (1. b)$$

von denen die erste die Helligkeiten anzeigt, womit die einzelnen Lichtstrahlen ins Auge gelangen, und die zweite die Bedingungen in sich trägt, unter welchen diese Helligkeiten grösste oder kleinste Werthe annehmen. Bei demselben niedrigsten Grade der Annäherung kann man die im Eingang dieser Ziffer gefundenen Grössen so schreiben:

$$\left. \begin{array}{ll} \sin. \psi = \frac{\sin. \omega \sin. i}{\sin. a} & \text{und} \quad \cos. \psi = 1 \\ \cos. \psi' = \sin. \omega \sin. i & \text{und} \quad \sin. \psi' = 1 \end{array} \right\} (2)$$

Den Gleichungen (2) zur Folge verwandelt sich aber die vordere Gleichung (7. e) in voriger Ziffer bei diesem Grade der Annäherung in folgende:

$$\sin. \mu = \cot. a \sin. \omega \sin. i \quad \text{und} \quad \cos. \mu = 1 \quad (3. a)$$

und die dortigen Gleichungen (7. f) werden:

$$\cos \varphi_1 = \cos. (\omega_1 + \mu) \quad \text{und} \quad \cos. \varphi_2 = -\cos. (\omega_1 + \mu - A), \quad (3. b)$$

oder

$$\varphi_1 = \omega_1 + \mu \quad \text{und} \quad \varphi_2 = \omega_1 + \mu + 180^\circ - A,$$

und diese letztern geben noch, wenn man sie nach ω_1 ableitet:

$$d\varphi_1 = 1 \quad \text{und} \quad d\varphi_2 = 1; \quad (3. c)$$

man kann also für φ_1 und φ_2 setzen $\omega_1 + \mu$ und $\omega_1 + \mu + 180^\circ - A$, und 1 sowohl für $d\varphi_1$ wie auch für $d\varphi_2$, weshalb die Gleichungen (1. a und b) jetzt die folgende Form annehmen:

$$A^2 = a^2 [\cos^2. A - \sin. 2(\omega_1 + \mu) \sin. 2(\omega_1 + \mu - A) \sin^2. \pi\Theta] \quad (4. a)$$

und

$$\begin{aligned} 0 = & \cos. 2(\omega_1 + \mu) \sin. 2(\omega_1 + \mu - A) \\ & + \cos. 2(\omega_1 + \mu - A) \sin. 2(\omega_1 + \mu), \end{aligned} \quad (4. b)$$

welche Gleichungen sich auch so schreiben lassen:

$$A^2 = a^2 [\cos^2. A - \frac{1}{2} [\cos. 2A - \cos. [4(\omega_1 + \mu) - 2A]] \sin^2. \pi\Theta] \quad (4. c)$$

und

$$(4. d) \quad 0 = \sin. [4(\omega_1 + \mu) - 2A].$$

Die Bedingung des Maximums oder Minimums (4. d) wird aber offenbar erfüllt, wenn $4(\omega_1 + \mu) - 2A$ null ist, oder auch ein Vielfaches von π , dann wird $\cos. (4\omega_1 + 4\mu - 2A) = \pm 1$, je nachdem $4\omega_1 + 4\mu - 2A$ ein gerades oder ungerades Vielfaches von π ist, wo die Null in erstere Vielfache eingeschlossen werden kann. Es wird folglich die Gleichung (4. c) entweder:

$$(5. a) \quad A^2 = a^2 [\cos^2. A + \sin^2. A \sin^2. \pi \Theta]$$

bei allen jenen Werthen, wo sie ein Maximum liefert, oder:

$$(5. b) \quad A^2 = a^2 [\cos^2. A - \cos^2. A \sin^2. \pi \Theta]$$

bei allen jenen Werthen, die zu einem Minimum führen.

Man darf indessen bei allen diesen Gleichungen nicht aus den Augen verlieren, dass die erste der in voriger Ziffer mitgetheilten, und mit ihr auch alle übrigen, nur innerhalb gewisser Grenzen brauchbar sind. Aus der Gleichung (7. c) erhält man nämlich in aller Strenge:

$$\sin^2. \psi = \frac{\sin^2. \omega \sin^2. i}{(\cos. a \cos. \omega \sin. i - \sin. a \cos. i)^2 + \sin^2. \omega \sin^2. i},$$

$$+ \text{tang. } \varphi = \frac{\sin. \omega \sin. i}{\cos. a \cos. \omega \sin. i - \sin. a \sin. i}$$

$$\cot. \psi = \cos. a \cot. \omega - \frac{\sin. a}{\sin. \omega},$$

woraus sich sodann der zu Anfang dieser Ziffer mitgetheilte Werth von $\sin. \psi$ ergibt, wenn man die Wurzel auszieht und

$$[(\cos. a \cos. \omega \sin. i - \sin. a \cos. i)^2 + \sin^2. \omega \sin^2. i]^{-\frac{1}{2}}$$

mittels Anwendung des Binomialsatzes in eine nach Potenzen von $\sin. i$ fortlaufende Reihe verwandelt, wobei die dritten und höhern Potenzen von $\sin. i$ vernachlässigt werden, unter der Voraussetzung, dass der erste Theil unter der Wurzel beträchtlich grösser als der zweite ist. Man sieht aber sogleich ein, dass dieses Verfahren da nicht mehr anwendbar ist, wo

$$\cos. a \cos. \omega \sin. i - \sin. a \cos. i = 0$$

oder

$$\text{tang. } i \cos. \omega = \text{tang. } a$$

ist, in welchem Falle man $\sin^2 \psi = 1$ findet, und man sieht leicht ein, dass jene Reihenentwicklung schon unbrauchbar wird, wo diese Relation auch nur nahehin stattfindet, nämlich in allen den Fällen, wo der erste Theil unter der Wurzel nicht mehr beträchtlich grösser als der zweite wird. Weil aber i stets sehr klein ist, so kann die Unanwendbarkeit jenes für $\sin. \psi$ erhaltenen Näherungswerthes auch nur bei kleinen Werthen von a eintreten, also nur an der Gränze, wo die Oberflächen der Platte der senkrechten Lage zur optischen Axe nahe kommen. Mit Ausnahme dieses Grenzfalles aber hat man nicht zu befürchten, dass die in dieser Ziffer gegebenen Näherungsformeln auf falsche Schlüsse führen könnten; dieser Grenzfall selber aber verlangt eine besondere Behandlung.

Es liegt in der Bedingung (4. d) ein höchst merkwürdiger Umstand verborgen, den wir um so weniger mit Stillschweigen übergehen dürfen, als er den Grund aller in dieser und der vorigen Ziffer vorgenommenen Rechnungen in sich trägt. Schreibt man nämlich die Bedingung (4. d) so:

$$\omega_1 + \mu - \frac{1}{2}A = \frac{1}{4}a\pi, \quad (5. c)$$

indem man unter α , wie schon oben, null und jede ganze, positive oder negative Zahl versteht, und erwägt man, dass die Gleichung (3. a) auf dem bisher eingehaltenen Grade der Annäherung

$$\mu = \cot. a \sin. \omega \sin. i,$$

liefert, so überzeugt man sich, dass die Werthe von ω_1 , welche ein Maximum oder Minimum liefern, in der Gleichung

$$\omega_1 = \frac{1}{2}A + \frac{1}{4}a\pi - \cot. a \sin. \omega \sin. i \quad (5. d)$$

enthalten und dieserhalb nicht für sämtliche Punkte des Gesichtsfeldes die gleichen sind; weil aber $\sin.(\omega + 180^\circ) = -\sin.\omega$ ist, so folgt, dass von zwei Stellen, die auf einer durch die Mitte des Gesichtsfeldes gehenden Geraden liegen und gleich weit von dieser Mitte abstehen, die eine dem Mittelwerth $\frac{1}{2}A + \frac{1}{4}a\pi$ von ω_1 um eben so viel voraneilt, als die andere hinter ihm zurück bleibt, so dass das arithmetische Mittel zwischen den, zwei solchen Stellen angehörigen Werthen von ω_1 , eine unveränderliche Grösse ist. In allen Fällen, wo μ einen sehr kleinen Werth annimmt, kann man mit hinreichender Genauigkeit

$$(5. e) \quad \omega_1 = \frac{1}{2}A + \frac{1}{4}a\pi$$

nehmen; nur an der einen Grenze, wo a der Null sich nähert, tritt eine Formveränderung ein, wie sich an der Hand der völlig genauen Gleichungen leicht zeigen lässt. Ist nämlich $a=0$, so liefert die Gleichung (7. c) der vorigen Ziffer entweder $\psi = -\omega$ oder $\psi = 180^\circ - \omega$ und die (7. d) daselbst gibt $\psi' = 90^\circ$; dann aber geht aus der dortigen Gleichung (7. e) hervor, dass $\mu = \psi$, sonach $\mu = \pi - \omega$ oder $\mu = -\omega$ wird, und nun liefert diesem Werthe von μ gemäss die Maximum- und Minimumbedingung (5. c) in aller Strenge:

$$(5. f) \quad \omega_1 = \frac{1}{2}A + \omega + \frac{1}{4}a\pi \quad \text{oder} \quad \omega_1 = \frac{1}{2}A - (\pi - \omega) + \frac{1}{4}a\pi,$$

welche Gleichung zeigt, dass jene Bedingung in diesem besondern Falle zwar an jedem einzelnen Halbmesser des Gesichtsfeldes die gleiche, jedoch von einem dieser Halbmesser zum andern verschieden ist und nur in dem einen Falle mit der abgekürzten Bedingung (5. e) übereinstimmt, wo $\omega = \pi$ oder $\omega = 0$ wird, d. h. in dem Durchmesser, der die Richtung der Hauptnormalebene hat. Auf dieselbe Weise findet man an der andern Grenze, wo $a = 90^\circ$ wird, successive $\cot.\psi = \frac{\cot.i}{\sin.\omega}$, $\psi' = \psi$, $\mu = 0$, $\cos.\varphi_1 = \cos.\omega_1 \sin.\psi$, $\cos.\varphi_2 = \cos.(\omega_1 - \alpha) \sin.\psi$ und es ist bis auf einen Fehler der dritten Ordnung genau $\sin.\psi = \sin.\omega \sin.i$. Diesen Werthen gemäss kann man in dem hier hervorgehobenen besondern Falle

die Bedingung des Maximums oder Minimums leicht ebenfalls bis auf einen Fehler der dritten Ordnung genau auffinden. Weil hier $\mu = 0$ wird, so gibt in diesem Falle die Gleichung (5. e) denselben Grad der Genauigkeit wie die (5. d).

Mit den bisher erhaltenen Formeln lassen sich nun alle die vielen einaxige Krystalle angehenden Fragen mit Leichtigkeit und Sicherheit beantworten, wie nun noch in der Abtheilung B) in Bezug auf eine einzige Krystallplatte ausführlicher gezeigt werden soll. Zuletzt wird in der Abtheilung C), welche die zweite Hälfte dieser Abhandlung ausmacht, an die Erklärung jener gleich im Eingange angekündigten überraschenden Erscheinung und noch vieler anderer verwandter geschritten werden, die von dem Uebereinanderliegen zweier Krystallplatten abhängig sind. Bei Bestimmung der Lichtstärke werden wir von jetzt an uns jedoch allerwärts mit den Näherungsgleichungen (4. c) und (4. d) begnügen, und selbst in diesen werden wir noch in der Regel $\mu = 0$ seyn lassen.

B) Bestimmung der in einer einzigen einaxigen Krystallplatte mit parallelen Oberflächen möglichen Erscheinungen.

X. Um die in der Gleichung (10. a) der Ziffer VII. enthaltenen Formen bequemer überschauen zu können, wollen wir ihr eine andere Bedeutung unterlegen. Denkt man sich nämlich aus der Mitte der Pupille auf das Bild der vom Auge wahrgenommenen Krystallplatte eine senkrechte Linie gezogen, die man die Axe der Erscheinung nennen kann, so macht jeder in das Auge gelangende Lichtstrahl mit dieser Axe denselben Winkel i , den er bei seinem Auffallen auf die Platte mit ihrer Normale bildete; denkt man sich daher nun noch um die Mitte der Pupille mit dem Radius 1 eine Kugel beschrieben, auf welche sich

die in der Platte wahrgenommenen Punkte projeciren, so sind $\sin.i$ die scheinbaren Abstände der in der Platte wahrgenommenen Punkte von der Axe der Erscheinung, oder, wenn man die Stelle, wo diese Axe die Erscheinung trifft, die Mitte des Gesichtsfeldes nennt, die auf diese Mitte bezogenen scheinbaren Radiusvectoren der einzelnen Punkte der Erscheinung, während ω die Winkel vorstellt, welche die Richtung dieser Radiusvectoren mit der Richtung der im Auge abgebildeten Hauptnormalebene der Platte macht. In diesem Sinne kann man die erwähnte Gleichung als auf Polarcoordinaten bezogen auffassen, und sie auf rechtwinklige Coordinaten dadurch übertragen, dass man

$$(1. a) \quad \cos.\omega \sin.i = x \quad \text{und} \quad \sin.\omega \sin.i = y$$

setzt, wodurch sie die Form

$$(1. b) \quad \Theta \cdot \frac{v}{T} = C + Dx + By^2 + Ax^2$$

annimmt, und die Coefficienten A, B, C, D in ihr die ihnen durch die Gleichungen (10. b) der Ziffer VII. gegebene Bedeutung haben.

In so ferne die Gleichung (10. a) der Ziffer VII. auf Polarcoordinaten bezogen wird, deren fester Punkt die Mitte des Gesichtsfeldes ist, und deren feste Richtung mit der im Auge erscheinenden Hauptnormalebene der Platte zusammenfällt, bezieht sich die vorstehende Gleichung (1. b) auf ein rechtwinkliges Coordinatensystem, dessen Spitze in der Mitte des Gesichtsfeldes liegt und dessen x-Axe mit der Hauptnormalebene im Bilde der Platte zusammenfällt.

Bekanntlich stellt die so gedachte Gleichung (1. b), vorausgesetzt, dass weder A noch B null ist, entweder eine Ellipse oder eine Hyperbel vor, deren Mittelpunkt jedoch nur dann in der Mitte des Gesichtsfeldes, in der Coordinatenspitze nämlich, liegt, wenn $D=0$ wird, was der zweiten Gleichung (10. b) der Ziffer VII. gemäss nur in dem Falle geschehen kann, wo $\sin.2a=0$ ist, also wenn entweder $a=0$ oder $a=90^\circ$ ist. Hieraus folgt, dass die Mittelpunkte der Helligkeitscurven,

da wo diese Ellipsen oder Hyperbeln werden, nur bei solchen Krystallplatten in der Mitte des Gesichtsfeldes liegen, deren Oberflächen entweder senkrecht zur optischen Axe stehen, oder mit dieser Axe parallel laufen; in allen andern Fällen liegen die Mittelpunkte dieser Curven ausserhalb der Mitte des Gesichtsfeldes.

Setzt man in der Gleichung (1. b) $x = \frac{1}{2} \cdot \frac{D}{A}$ für x , d. h. verlegt man die Coordinatenspitze um $\frac{1}{2} \cdot \frac{D}{A}$ in der Richtung der Hauptnormalebene rückwärts von der Mitte des Gesichtsfeldes, so wird sie:

$$\Theta \frac{v}{T} = C = \frac{1}{4} \cdot \frac{D^2}{A^2} = By^2 + Ax^2, \quad (2. a)$$

und gibt so zu verstehen, dass jetzt die Coordinatenspitze in dem Mittelpunkt der Curve liegt. Der Mittelpunkt der Helligkeitscurven liegt also jedesmal in der Richtung der Hauptnormalebene und in dem scheinbaren Abstände $\frac{1}{2} \cdot \frac{D}{A}$ von der Mitte des Gesichtsfeldes entfernt. Wird dieser scheinbare Abstand mit E bezeichnet, so ist also:

$$E = \frac{1}{2} \cdot \frac{D}{A}, \quad (2. b)$$

oder wenn man für D und A ihre, den Gleichungen (10. b.) der Ziffer VII. entnommenen, Werthe einsetzt:

$$E = \frac{1}{2} \frac{vm(v''^2 - v'^2) \sin. 2a}{v'(m^3 - v'v''^2)}, \quad (2. c)$$

welche Gleichung den Abstand der Curvenmitte von der Mitte des Gesichtsfeldes hergibt; gleichviel ob man es mit einer Ellipse oder mit einer Hyperbel zu thun hat, und zwar gibt sie diesen Abstand als negative oder positive Grösse, je nachdem die Curvenmitte mit der Hauptnormalebene auf einerlei oder auf entgegengesetzten Seiten liegt.

XI. Der in der letzten Gleichung ausgesprochene Abstand E wird unendlich gross, wenn

$$m^3 = v'v''^2 \quad (1. a)$$

ist; dann aber wird der letzten in (Ziffer VII.) mitgetheilten Gleichung (10. b) zur Folge $A=0$ und nun geht die Gleichung (1. b) der vorigen Ziffer über in:

$$(1. b) \quad \Theta \frac{v}{T} - C = Dx + By^2,$$

welches die Gleichung einer Parabel ist, deren Axe in der Richtung der Hauptnormalebene liegt.

Wir wollen die Gleichung (1. a), welche die Bedingung in sich trägt, unter welcher in einer Krystallplatte Parabeln entstehen, noch etwas näher untersuchen, und machen zu diesem Ende darauf aufmerksam, dass oben

$$v''^2 \sin^2 a + v'^2 \cos^2 a = m^2$$

gesetzt worden ist. Fügt man hierzu die identische Gleichung:

$$v''^2 \sin^2 a + v''^2 \cos^2 a = v''^2,$$

so liefert die Differenz beider

$$(v'^2 - v''^2) \cos^2 a = m^2 - v''^2,$$

woraus man findet:

$$(2. a) \quad \cos^2 a = \frac{m^2 - v''^2}{v'^2 - v''^2},$$

oder wenn man für m seinen aus der Gleichung (1. a) sich ergebenden Werth setzt:

$$(2. b) \quad \cos^2 a = \frac{v''^3 \sqrt{v'^2 v''^2 - v''^2}}{v'^2 - v''^2}.$$

Man kann sich leicht überzeugen, dass durch diese Gleichung stets ein wirklicher Winkel a gefunden wird; es liegt nämlich, so lange v' und v'' von einander verschiedene Werthe haben, d. h. so lange man es mit doppelt brechenden Krystallen zu thun hat, $\sqrt[3]{v'v''^2}$ stets zwischen v' und v'' . Ist also $v' > v''$, so ist auch $\sqrt[3]{v'v''^2} > v''$, ist aber $v' < v''$,

so ist auch $\sqrt[3]{v'^2 v''} < v''$, somit erhalten Zähler und Nenner des in der Gleichung (2. b) enthaltenen Ausdrucks stets einerlei Vorzeichen, und in Folge dessen findet man für $\cos^2 a$ immer eine positive Zahl, welche Zahl aber auch stets zwischen 0 und 1 liegt, denn da $\sqrt[3]{v'^2 v''}$ stets zwischen v' und v'' liegt und in Folge $v'' \sqrt[3]{v'^2 v''}$ zwischen $v'' v'$ und v''^2 , so ist $v'' \sqrt[3]{v'^2 v''} \leq v''^2$, je nachdem $v' \geq v''$ ist, und dieserhalb wird der absolute Zähler in (2. b) stets kleiner als der Nenner. Man erhält sonach für $\cos^2 a$ unter allen Umständen einen positiven echten Bruch, folglich für a stets einen wirklichen, angeblichen Winkel. Hieraus schliessen wir, dass sich aus allen einaxigen Krystallen Platten schneiden lassen, welche Parabeln sehen lassen, dass dazu aber eine völlig bestimmte Neigung ihrer Oberflächen zur optischen Axe erforderlich ist.

XII. Man könnte glauben, dass auch das Glied By^2 aus der Gleichung (1. c) Ziffer X. verschwinden kann; denn dies geschieht den Gleichungen (10. b) der Ziffer VII. gemäss, wenn $m = \frac{v''^2}{v'}$ ist, und dann ginge, die Gleichung (1. c) über in $Dx + Ax^2 = \Theta \cdot \frac{v}{T} - C$ und würde gerade zur Hauptnormalebene senkrechte Linien anzeigen; will man aber den diesem Werth von m entsprechenden Winkel a aufsuchen und setzt man zu diesem Ende jenen Werth von m in die Gleichung (2. a) der vorigen Ziffer, so erhält man:

$$\cos^2 a = \frac{v''^2 (v'^2 - v''^2)}{v'^2 (v'^2 - v''^2)} = \frac{v''^2}{v'^2},$$

und dies zeigt, dass in diesem Falle kein reeller Winkel a gefunden werden kann, dass also keine Platte möglich ist, welche diese geraden Linien zu zeigen im Stande wäre. Hieraus lässt sich der Schluss ziehen, dass sich aus keinem einaxigen Krystall eine Platte schneiden lässt, in der geradlinige Interferenzstreifen sichtbar werden könnten. Was

man insgemein so zu nennen pflegt, sind bloß Annäherungen an gerade Linien, auf deren Ursprung wir in Kurzem stossen werden.

Der Grund dieser Unmöglichkeit vom Erscheinen gerader Linien in einzelnen Krystallplatten liegt schon in dem für m erhaltenen Werth $\frac{v''^2}{v'}$. Ist nämlich $v'' < v'$, so ist auch $\frac{v''}{v'} < 1$ und demnach $\frac{v''^2}{v'} < v''$; ist aber $v'' > v'$, so ist auch $\frac{v''}{v'} > 1$ und demnach $\frac{v''^2}{v'} > v''$. In jedem Falle liegt also $\frac{v''^2}{v'}$ ausserhalb der Grenzen v' und v'' , und dieser Umstand ist mit keinem möglichen Werth von a vereinbar, wovon man sich durch die folgenden Betrachtungen überzeugen kann. Es lässt sich nämlich der in Ziffer XI. angegebene Ausdruck von m^2 auf die nachstehenden zwei Weisen schreiben:

$$m^2 = v''^2 - (v''^2 - v'^2) \cos^2 a \quad \text{und} \quad m^2 = v'^2 - (v'^2 - v''^2) \sin^2 a$$

und hieraus lässt sich mit Leichtigkeit abnehmen, dass so lange a ein wirklicher Winkel ist, und deshalb weder $\cos^2 a$ noch $\sin^2 a$ die Grenzen 0 und 1 überschreiten, auch m^2 die Grenzen v''^2 und v'^2 nicht überschreiten könne. Zwar hat man m aus dem Ausdrücke für m^2 durch Ausziehen der Quadratwurzel abzuleiten, und erhält demnach m als eine sowohl positive wie negative Grösse, von denen die letztere ausserhalb der Grenzen v' und v'' liegt, aber die erstere kann in keinem Falle unter Voraussetzung eines möglichen Winkels a die Grenzen v' und v'' überschreiten, welche Anforderung an den obigen Werth von m , welcher $\frac{v''^2}{v'}$ war, sonach sich als ein positiver zu erkennen gibt, wie man sieht, im Widerspruche mit einem möglichen Plattenschnitte steht.

XIII. Bis hierher haben wir bloß den Einfluss, den die in Ziffer X. festgesetzten Coefficienten A , B und D theils auf die Gestalt und Art der in Krystallplatten sich zeigenden Helligkeitscurven, theils auf deren Lage im Gesichtsfelde ausüben, und hierbei kam uns der Umstand zu

statten, dass die genannten Coefficienten bei einer und derselben Platte ihren Werth nicht ändern; jetzt aber werden wir auch den dort durch $\Theta \cdot \frac{v}{T} - C$ bezeichneten Coefficienten in unsere Betrachtungen aufnehmen, von welchem die absoluten Grössen der Curven abhängen, und dessen Besonderheit Ursache ist, dass in den Gleichungen (1. b) der Ziffer XI. nicht eine Curve, sondern ein System von unzählig vielen, unter sich ähnlichen Curven enthalten ist. Dieser Coefficient, nämlich:

$$\Theta \cdot \frac{v}{T} - C. \quad (1. a)$$

nimmt in Folge der in ihm vorkommenden Grösse Θ eine Veränderlichkeit an, die ihm sehr bemerkenswerthe Eigenthümlichkeiten gibt. Erwägt man, dass die Grösse Θ , welche durch die Gleichung (1. b) der Ziffer X. gegeben wird, selbst in einer und derselben Platte, worin die Grössen v , v' , v'' und a unveränderliche Werthe behalten, je nach den Werthen von i und ω , d. h. je nach der Lage des einfallenden Strahles unendlich viele und von einander sehr verschiedene Werthe annehmen kann, dass jedoch ganze Reihen von Punkten, auf welche die Grössen i und ω von Stelle zu Stelle gleichen und entgegengesetzten Einfluss ausüben, denselben Werth von Θ annehmen, so wird man gewahr, dass die Gleichung (1. b) der Ziffer X. für jeden bestimmten Werth von Θ diejenige Curve an die Hand gibt, welche die diesem Werthe von Θ entsprechende Reihe von Punkten in sich trägt. Wie beschaffen aber auch immer dieser Werth von Θ seyn mag, so lässt sich derselbe doch immer zerlegen in eine positive oder negative *ganze Zahl*, die wir durch den deutschen Buchstaben α vorstellen wollen, und in einen positiven oder negativen *echten Bruch*, der durch η bezeichnet werden mag, so dass wir unter allen Umständen setzen können:

$$\Theta = \alpha + \eta, \quad (1. b)$$

wenn man sich unter α die geeignete ganze Zahl, und unter η den geeigneten echten Bruch geschrieben denkt, und es nimmt in Folge dieser Bezeichnung der Coefficient (1. a) die andere Gestalt an:

$$(1. c) \quad (a + \eta) \frac{v}{T} = C.$$

In Gemässheit der durch die Gleichung (1. b) der Grösse Θ zugetheilten Form nimmt aber die Intensitätsgleichung (6. b) der Ziffer VIII. die folgende Gestalt an:

$$(2. a) \quad A^2 = a^2 [\cos^2 \mathcal{A} - \sin. 2\varphi_1 \sin. 2\varphi_2 \cos. \chi \sin^2 \eta \pi],$$

oder wenn man nach Anleitung der Ziffer (IX.) sehr kleine Unterschiede nicht beachten und dem zur Folge

$$\chi = 0 \text{ oder } \chi = 180^\circ, \varphi_1 = \omega_1, \varphi_2 = \omega_2$$

setzen will, die folgende:

$$(2. b) \quad A^2 = a^2 [\cos^2 \mathcal{A} - \sin. 2\omega_1 \sin. 2\omega_2 \sin^2 \eta \pi],$$

in welcher ω_1 und ω_2 die Winkel vorstellen, welche die Hauptnormalebene der Platte mit der vordern und hintern Polarisationssebene macht. Diese Gleichungen geben zu verstehen, dass bei gleicher Stellung der beiden Polarisationssebenen zu einander und des Hauptschnittes, oder auch, mit geringem Unterschiede, der Hauptnormalebene zu ihnen die Helligkeit aller zu einerlei Werth von η gehörigen Stellen die gleiche sey, sonach dieselben in allen Helligkeitscurven, deren Θ denselben Bruch η in sich trägt, was auch übrigens immer die dazu gehörige ganze Zahl a seyn mag. Während sich Θ von einer Helligkeitscurve zur andern allmählig abändert, trifft diese Abänderung von vorn herein lediglich den Bruch η und erst dann die ganze Zahl a , nachdem η von Null an bis zur 1 hin angewachsen ist, und a in $a + 1$ übergeht. Von da ab nimmt der Bruch η wieder allein zu bis zu dem Punkte hin, wo er in 1 übergehen will, und dann a auf's Neue um eine Einheit grösser wird. Auf solche Weise entstehen Werthe von Θ in Menge, die denselben echten Bruch η , aber verschiedene ganze Zahlen a in sich enthalten. Weil nun alle Curven, die solchen Werthen von Θ entsprechen, einerlei Helligkeitsverhältnisse in sich aufnehmen, so wollen wir sie dieses Umstands halber *gleichwerthige* nennen, und von zwei gleich-

werthigen Curven sollen die *nächste* heissen, deren Θ sich bloß darin von einander unterscheiden, dass das a im einen um eine Einheit grösser oder kleiner ist als im andern. Während aber η alle echten Brüche zwischen 0 und 1 durchläuft, und die ganze Zahl a ihren Werth nicht ändert, ändern sich die Helligkeitsverhältnisse der unmittelbar neben einander liegenden Helligkeitscurven allmählig und fortwährend ab, zur Hälfte aus der Dunkelheit zu stets grösserer Helligkeit ansteigend und in der andern Hälfte von da ab bis zur Dunkelheit zurück wieder abnehmend. Den Inbegriff von allen den Helligkeitscurven, welche zu einer und derselben ganzen Zahl gehören, aber allen möglichen Werthen des echten Bruches η entsprechen, werden wir ein *Helligkeitsband* nennen; diese Helligkeitsbänder besitzen sonach die allen gemeinsame Eigenthümlichkeit, von einer Seite zur andern hin, durch alle Nuancen der Helligkeit vom Dunkel bis zu einem gewissen Grade hin und von da wieder bis zum Dunkel zurück schattirt zu seyn.

XIV. Nachdem wir in der vorigen Ziffer den allgemeinen Typus der Interferenzerscheinungen in Krystallplatten kennen gelernt haben, wie er sich aus der Besonderheit des Coefficienten (1. a) ergibt, fahren wir nun in der Untersuchung der in der Gleichung (1. b) Ziffer X. enthaltenen Curven weiter fort. Fassen wir zuvörderst die in der Gleichung (1. b) Ziffer XI. enthaltenen Parabeln in's Auge und setzen wir in derselben $y = 0$, so wird sie

$$\Theta \frac{v}{T} - C = Dx$$
 und der hieraus für x sich ergebende Werth liefert den Abstand des Scheitels dieser Parabel von der Mitte des Gesichtsfeldes, welcher Abstand sonach

$$\frac{\Theta \frac{v}{T} - C}{D}$$

ist. Gehen wir nun von dieser Parabel zu ihrer nächsten gleichwerthi-

gen über, in welcher das α der vorigen um eine Einheit grösser geworden ist, η dagegen seinen alten Werth behalten hat, was darauf hinausläuft, dass Θ sich in $\Theta + 1$ umgewandelt hat, so ist der Abstand dieser nächsten gleichwerthigen Parabel von der Mitte des Gesichtsfeldes

$$\frac{(\Theta + 1) \frac{v}{T} - C}{D},$$

folglich ist der Abstand der Scheitel dieser zwei Parabeln von einander, weil die Scheitel aller in derselben Gleichung enthaltenen Parabeln in der Hauptnormalebene der Platte liegen, die Differenz der beiden so eben gefundenen Abstände, nämlich:

$$\frac{v}{T} \cdot \frac{1}{D},$$

und da D so wie T an einer und derselben Platte stets einen und denselben Werth behält, so geht hieraus hervor, dass die Scheitel aller in einer Krystallplatte wahrnehmbaren Parabeln gleichweit von einander abliegen, wenn v seinen Werth nicht ändert, d. h. so lange ein und dasselbe Licht auf die Platte einfällt. Diese Eigenthümlichkeit der Parabeln ist um so merkwürdiger, weil sie ein sehr einfaches Mittel an die Hand gibt, ohne eigentliches Messen zu entscheiden, ob man es in einem gegebenen Falle mit wirklichen Parabeln zu thun habe, oder nur mit solchen Curven, die sich den Parabeln zwar annähern, ohne dass sie es jedoch in Wahrheit sind.

XV. Fassen wir nun die Gleichung (1. b) der Ziffer X. unter der Voraussetzung in's Auge, dass in ihr weder A noch B null sey, in welchem Falle durch dieselbe jedenfalls eine Mittelpunktcurve, die eine Ellipse oder eine Hyperbel seyn kann, dargestellt wird, und setzen wir in dieser $y = 0$, wodurch sie wird:

$$(1. a) \quad \Theta \frac{v}{T} - C = Dx + Ax^2,$$

so liefern die beiden hieraus für x sich ergebenden Werthe die Abstände

der Durchschnittspunkte dieser Curven mit der Richtung der Hauptnormalebene der Platte von der Mitte des Gesichtsfeldes; diese Abstände sind daher:

$$\pm \sqrt{\frac{A(\Theta^{\frac{v}{T}} - C) + \frac{1}{4}D^2}{A}} - \frac{1}{2} \frac{D}{A}$$

und es liegen beide Durchschnittspunkte auf verschiedenen Seiten von der Mitte des Gesichtsfeldes. Diese Abstände werden, wenn man $D = 0$ seyn lässt, d. h. wenn man sich die Coordinatenspitze in dem Mittelpunkt der Curve liegend denkt:

$$\pm \sqrt{\frac{\Theta^{\frac{v}{T}} - C}{A}}$$

und dem gemäss wird das Quadrat eines jeden:

$$(1. b) \quad \frac{\Theta^{\frac{v}{T}} - C}{A}$$

Fügt man zu der bisherigen Curve, in welcher Θ noch jeden beliebigen Werth haben kann, ihre nächste gleichwerthige hinzu, in welcher Θ den um 1 grössern Werth angenommen hat, so findet man in Bezug auf diese zweite Curve das Quadrat des Abstandes ihres Mittelpunktes von einem ihrer Durchschnittspunkte mit der Richtung der Hauptnormalebene der Platte gleich:

$$(1. c) \quad \frac{(\Theta + 1)^{\frac{v}{T}} - C}{A}$$

Folglich ist die Differenz dieser Quadrate bezüglich zweier nächster gleichwerthiger Mittelpunktscurven, wie sie einzeln in (1. b) und (1. c) aufgefunden worden sind:

$$(1. d) \quad \frac{v}{T} \cdot \frac{1}{A}$$

Es ist also die Differenz der Quadrate zweier Halbaxen, welche zu zwei nächsten gleichwerthigen Mittelpunktscurven gehören und in der

Richtung der Hauptnormalebene der Platte liegen, die constante Grösse
 $\frac{1}{A} \cdot \frac{v}{T}$.

Bezeichnet man diese Halbaxe bei einer beliebigen solchen Mittelpunktscurve durch H und bei ihrer nächsten gleichwerthigen durch H' , so ist also

$$(2. a) \quad H'^2 - H^2 = \frac{1}{A} \cdot \frac{v}{T}$$

oder

$$(H' - H)(H' + H) = \frac{1}{A} \cdot \frac{v}{T},$$

woraus man findet

$$(2. b) \quad H' - H = \frac{v}{TA(H' + H)},$$

es ist aber $H' - H$ der Abstand zweier unmittelbar neben einander liegender Durchschnittspunkte, die durch zwei nächste gleichwerthige Heligkeitscurven in der Richtung der Hauptnormalebene veranlasst werden, darum spricht sich in der Gleichung (2. b) der nachfolgende Satz aus: *Die Abstände zweier nächster gleichwerthiger Mittelpunktscurven längs der Hauptnormalebene gemessen, sind der in derselben Richtung liegenden mittlern Axe beider Curven umgekehrt proportional, und werden daher in dem Masse kleiner als die Curven selber grösser werden.*

Gesellt man zu den vorigen zwei Curven, deren Halbaxen H und H' waren, noch die dritte hinzu, welche auf die letztere folgt und deren nächste gleichwerthige ist, so ist, wenn H'' die in der Richtung der Hauptnormalebene liegende Halbaxe dieser dritten Curve vorstellt, der Gleichung (2. b) gemäss:

$$(3. a) \quad H'' - H' = \frac{v}{TA(H' + H)}$$

und es ist $H'' - H'$ der Abstand zweier zunächst bei einander liegender Durchschnittspunkte der zweiten und dritten Curve mit der Richtung

der Hauptnormalebene. Mithin ist der Unterschied zwischen zwei auf einander folgenden solchen Abständen:

$$\frac{v}{TA(H'+H)} - \frac{v}{TA(H''+H')} \quad \text{oder} \quad \frac{v}{T} \cdot \frac{H''-H}{A(H''+H')(H'+H)}; \quad (3. b)$$

in Fällen also, wo sowohl $H' - H$ als $H'' - H'$ und also auch die Summe beider oder $H'' - H$ sehr klein ist in Vergleich zu $H' + H$ und zu $H'' + H'$, wird der Unterschied zwischen den Abständen dreier auf einander folgender, gleichwerthiger Curven eine sehr kleine Grösse der zweiten Ordnung im Verhältniss zu den vorigen, die von unsern Sinnen nicht mehr wird empfunden werden können, selbst wenn dem Auge gleichzeitig eine ganze Reihe solcher Curven entgegentritt, in welchen die Unterschiede zwischen den ersten und letzten Abständen schon beträchtlicher geworden sind.

XVI. Hätten wir in der Gleichung (1. b) der Ziffer X. $x = 0$ gesetzt, statt $y = 0$, wie in der vorigen Ziffer geschehen ist, so wäre sie geworden:

$$\Theta \cdot \frac{v}{T} - C = By^2, \quad (1. a)$$

und die aus dieser Gleichung für y sich ergebenden Werthe hätten den Abstand der Mitte des Gesichtsfeldes von den Durchschnittspunkten, in welchen die Curve eine durch die Mitte des Gesichtsfeldes senkrecht zur Richtung der Hauptnormalebene gezogene Gerade trifft, zu erkennen gegeben; das Quadrat dieses Abstandes ist also:

$$\frac{\Theta \cdot \frac{v}{T} - C}{B}. \quad (1. b)$$

Bei diesen Bestimmungen, so wie schon bei denen der vorigen Nummer ist indessen zu erwägen, dass sie nur dann zu wirklichen Punkten führen, wenn die unter dem Wurzelzeichen stehende Grösse eine positive Zahl liefert, welches, wenn die Coordinatenspitze im Mittelpunkt der Curve liegt, bei den in der vorigen Ziffer aufgesuchten Abständen

der Fall seyn wird, wenn A und $\Theta \frac{v}{T} - C$ einerlei Vorzeichen haben, und bei den jetzt bestimmten, wenn B und $\Theta \frac{v}{T} - C$ einerlei Vorzeichen haben. Bei Ellipsen werden für einen gegebenen Werth von $\Theta \frac{v}{T} - C$ nothwendig die beiderlei Bestimmungen zu wirklichen Durchschnittspunkten hinführen müssen, so wie eine es thut, und keine, so wie eine es nicht thut, weil in ihnen A und B stets einerlei Vorzeichen besitzen; bei Hyperbeln hingegen wird bei einem gegebenen $\Theta \frac{v}{T} - C$ die eine der beiden Bestimmungen auf keinen wirklichen Durchschnittspunkt hinführen können, wenn die andere einen solchen bringt, und jene wird ihn bringen müssen, so wie diese keinen gibt, weil in ihnen A und B stets entgegengesetzte Vorzeichen besitzen. Man sieht hieraus, dass nicht jeder Werth von Θ , von welchem der Werth von $\Theta \frac{v}{T} - C$ abhängt, Ellipsen hervorbringen wird, und dass zwar jeder Werth von Θ Hyperbeln zu liefern im Stande ist, von denen aber ein Theil nur Durchschnittspunkte mit der Richtung der Hauptnormalebene liefern wird, der andere Theil nur solche, die von der Hyperbel an einer auf der Hauptnormalebene senkrechten Richtung gebildet werden; jener Theil entspricht Hyperbeln, deren grosse Axe längs der Hauptnormalebene liegt, dieser Theil dagegen Hyperbeln, deren grosse Axe senkrecht zur Hauptnormalebene steht. Hier nun tritt wieder die in Ziffer XIII. besprochene Eigenthümlichkeit des Coefficienten $\Theta \frac{v}{T} - C$ bedeutungsvoll hervor. Da nämlich Θ oder $\alpha + \eta$ in der Regel eine grosse Menge von Einheiten überschreiten und dabei sowohl positiv wie negativ seyn kann, so kann dadurch $\Theta \frac{v}{T} - C$ eine sowohl positive wie negative Zahl von grössern und geringern Umfang werden, so dass die Gleichung (1. b) der Ziffer X. immer ein System von Ellipsen liefern wird, wenn nur A und B einerlei Vorzeichen haben, und eben so immer ein System von beiderlei Arten der Hyperbeln, solcher, deren Axen längs der Hauptnormalebene

liegen und solcher, deren Axen senkrecht darauf stehen, wenn nur die Coefficienten A und B entgegengesetzte Vorzeichen haben. Die Quadrate der längs der Hauptnormalebene liegenden Axen verhalten sich in allen diesen Mittelpunktscurven zu den Quadraten der darauf senkrechten Axen wie die Grössen $\frac{\Theta \frac{v}{T} - C}{A}$ und $\frac{\Theta \frac{v}{T} - C}{B}$ zu einander also wie B zu A und es macht keinen Unterschied, wenn es Hyperbeln sind, ob sie der einen oder andern Art angehören, d. h. ob ihre grossen Axen in der Hauptnormalebene oder senkrecht darauf liegen, nur wird bei ihnen immer eines von jenen Quadraten als negative Grösse sich geben, so dass dann die zugehörige Axe als unmögliche Grösse erscheint.

XVII. Nachdem wir im Vorigen die allgemeinen Eigenschaften der Helligkeitscurven auseinander gesetzt haben, wollen wir jetzt alle besondern Verhältnisse derselben in der Absicht zusammen stellen, um in der nächsten Ziffer mit ihrer Hilfe das Ineinandergreifen und die Aufeinanderfolge der sämtlichen hier untersuchten Interferenzerscheinungen gleichsam in einem Bilde dem Leser vorführen zu können, wodurch er in den Stand gesetzt wird, die unendliche Mannigfaltigkeit derselben wie an einem Faden stets fest in der Hand zu halten. Wir beginnen die Reihe der besondern Verhältnisse mit solchen, die wir schon früher vorgelegt haben.

Erstes Verhalten. Der Werth von m kann, wenn er positiv ist, nie über die Grenzen v' und v'' , und, wenn er negativ ist, nie über die Grenzen $-v'$ und $-v''$ hinausfallen. Es ist dieses Verhalten schon in der Ziffer XII. ausführlich erörtert worden.

Zweites Verhalten. Der Werth $\sqrt[3]{v'v''^2}$ liegt stets zwischen den Grenzen v' und v''^2 und der $\frac{v''^2}{v'}$ fällt stets über die Grenzen v' und v'' hinaus, und zwar ist letzterer kleiner oder grösser als v'' , je nachdem v'' kleiner oder grösser als v' ist, d. h. je nachdem die

Werthe v' und v'' positiven oder negativen einaxigen Krystallen angehören. Ersteres ist schon in Ziffer XI. und letzteres noch vor dem Verhalten 1. in Ziffer XII. umständlich erwiesen worden.

Untersuchen wir nun die Natur des in den Gleichungen (1. d) der Ziffer X. bestimmten Coefficienten A, so finden wir sogleich, weil

$$A = \frac{1}{2}T \left(\frac{v'}{v^2} - \frac{v'^2 v''^2}{v^2 m^3} \right) = \frac{1}{2}T \left(1 - \frac{v' v''^2}{m^3} \right) \frac{v'}{v^2}$$

ist, dass A jedesmal positiv wird, wenn m eine negative Zahl ist, und, wenn m eine positive Zahl ist, nur dann, wenn $m > \sqrt[3]{v' v''^2}$, dagegen wird A negativ, wenn m positiv und $< \sqrt[3]{v' v''^2}$ ist. Eben so geht aus der dritten Gleichung (1. d) der Ziffer X., welche

$$B = \frac{1}{2}T \left(\frac{v'}{v^2} - \frac{v''^2}{v^2 m} \right) = \frac{1}{2}T \cdot \frac{v'}{v^2} \left(1 - \frac{v''^2}{v' m} \right)$$

ist, hervor, dass B jedesmal positiv wird, wenn m eine negative Zahl ist, aber, wenn m positiv ist, nur so lange als es $> \frac{v''^2}{v'}$ ist, dagegen wird B negativ, wenn m positiv und $< \frac{v''^2}{v'}$ ist. Fasst man diese Grössenverhältnisse von A und B zusammen, so ergibt sich aus ihnen:

- α) dass A und B nie entgegengesetzte Vorzeichen annehmen können, wenn m negativ ist, und bei einem positiven m nur dann, wenn entweder $m > \sqrt[3]{v' v''^2}$ und zugleich $m < \frac{v''^2}{v'}$ ist, in welchem Falle A positiv, B negativ wird, oder wenn $m < \sqrt[3]{v' v''^2}$ und zugleich $m > \frac{v''^2}{v'}$ ist, in welchem Falle A negativ, B positiv wird;
- β) dass A und B jedesmal einerlei Vorzeichen und zwar das + annehmen, wenn m negativ ist, wenn aber m positiv ist, nur dann, wenn entweder $m > \sqrt[3]{v' v''^2}$ und zugleich $m > \frac{v''^2}{v'}$ ist, in welchem Falle A und B beide das Vorzeichen + erhalten, oder

wenn $m < \sqrt[3]{v'v''^2}$ und zugleich $m < \frac{v''^2}{v'}$ ist, in welchem Falle A und B beide das Vorzeichen — annehmen.

Da nun entgegengesetzte Vorzeichen von A und B zu der einen oder andern Art von den in Ziffer XVI. angezeigten Hyperbeln führen, gleiche Vorzeichen von A und B aber jedesmal Anlass zur Ellipse geben, so können wir die in α) und β) hervorgehobenen Verhältnisse mit andern Worten so aussprechen;

$\alpha^*)$ In einaxigen Krystallplatten können Hyperbeln nur dann entstehen, wenn m positiv ist, und entweder sowohl $m > \sqrt[3]{v'v''^2}$ wie auch $m < \frac{v''^2}{v'}$ ist, oder sowohl $m < \sqrt[3]{v'v''^2}$, wie auch $m > \frac{v''^2}{v'}$ ist.

$\beta^*)$ In einaxigen Krystallplatten können Ellipsen jedesmal entstehen, wenn m negativ ist und bei einem positiven m nur dann, wenn entweder sowohl $m > \sqrt[3]{v'v''^2}$ wie auch $m > \frac{v''^2}{v'}$ oder wenn sowohl $m < \sqrt[3]{v'v''^2}$ wie auch $m < \frac{v''^2}{v'}$ ist.

Bringen wir jetzt diese Verhältnisse mit dem zweiten Verhalten in Verbindung, indem wir positive und negative Krystalle von einander unterscheiden, weil diesem Verhalten gemäss, bei positiven Krystallen, in welchen $v'' < v'$ ist, immer $\frac{v''^2}{v'} < v''$ ist, hingegen bei negativen Krystallen, in welchen $v'' > v'$ ist, immer $\frac{v''^2}{v'} > v''$ ist, so dass bei jenen nie $\frac{v''^2}{v'} > v''$, bei diesen nie $\frac{v''^2}{v'} < v''$ seyn, und desshalb bei ersteren die erste in $\alpha^*)$, so wie die zweite in $\beta^*)$ niedergelegte Bedingung von selber wegfällt, bei negativen Krystallen dagegen die zweite in $\alpha^*)$, so wie die erste in $\beta^*)$ niedergelegte, so können wir die in diesen beiden Buchstaben beschriebenen Verhältnisse mit grösserer Bestimmtheit so aussprechen:

Drittes Verhalten. Hyperbeln sind nie mit einem negativen Werth von m vereinbar, und bei einem positiven Werth von m können sie in positiven Krystallplatten nur dann entstehen, wenn $m < \sqrt[3]{v'v''^2}$ ist, in negativen Krystallen nur, wenn $m > \sqrt[3]{v'v''^2}$ ist, indem die Bedingung $m > \frac{v''^2}{v'}$ bei jenen, die $m < \frac{v''^2}{v'}$ bei diesen sich immer schon von selbst versteht.

Viertes Verhalten. Ellipsen können in positiven, wie in negativen Krystallen jedesmal entstehen, wenn m negativ ist; bei einem positiven m aber in positiven Krystallen nur dann, wenn $m > \sqrt[3]{v'v''^2}$, in negativen Krystallen nur, wenn $m > \sqrt[3]{v'v''^2}$ ist, indem auch hier wieder die andere Bedingung $m > \frac{v''^2}{v'}$ bei jenen, die $m < \frac{v''^2}{v'}$ bei diesen sich schon von selber versteht, in allen Fällen muss also bei Ellipsen m zwischen v' und $\sqrt[3]{v'v''^2}$ liegen. Uebrigens kann man hier noch bemerken, dass Grenzbedingungen für positive Werthe von m mit entgegengesetztem Vorzeichen genommen, zugleich auch Grenzbedingungen für die negativen Werthe von m werden und umgekehrt, wie daraus erhellet, dass mögliche Werthe von m aus der Gleichung $m^2 = v''^2 \sin^2 a + v'^2 \cos^2 a$ immer nur paarweise von gleicher Grösse und entgegengesetztem Vorzeichen gefunden werden.

Weil $\sqrt[3]{v'v''^2}$ stets zwischen v' und v'' liegt und also die Bedingung $m < \sqrt[3]{v'v''^2}$ nie den grössern dieser beiden Werthe für m zulässt, so wie die Bedingung $m > \sqrt[3]{v'v''^2}$ nie den kleinern von jenen beiden Werthen zulässt, so folgt aus den letzten zwei Verhalten noch das nachstehende mit grosser Leichtigkeit:

Fünftes Verhalten. Wenn in einaxigen Krystallplatten Hyperbeln entstehen, so kann bei ihnen m nie den Werth v' erreichen, und wenn in den Krystallplatten Ellipsen entstehen, so kann bei ihnen m nie den Werth v'' erreichen, und zwar ist es hierbei ganz gleichgültig, ob die Platten aus positiven oder negativen Krystallen geschnitten worden sind. Und weil die Gleichung

$$m^2 = v'^2 \sin^2 a + v''^2 \cos^2 a$$

für m immer zwei gleiche und entgegengesetzte Werthe liefert, so ist, wenn ein positiver Werth von m nicht erreicht werden kann, auch derselbe negativ genommen unmöglich, so dass bei Ellipsen m auch nie die Grenze $-v''$ erreichen kann.

XVIII. Nun können wir an die für unsern Gegenstand werthvollste Aufgabe schreiten, obschon sie zu lauter negativen Resultaten führt, weil gerade aus diesen die möglichen in einaxigen Krystallplatten entstehenden Helligkeitscurven sich erkennen lassen. Der Ausdruck (1. b) Ziffer XV. hat uns das Quadrat der längs der Hauptnormalebene liegenden Halbaxe einer Mittelpunktcurve in der Grösse

$\frac{\Theta \frac{v}{T} - C}{A}$ gegeben,

und eben so der Ausdruck (1. b) Ziffer XVI. das Quadrat der auf der

Hauptnormalebene senkrecht stehenden Halbaxe in der Grösse $\frac{\Theta \frac{v}{T} - C}{B}$.

Dividirt man die letztere Grösse durch die vorige, so erhält man $\frac{A}{B}$; bezeichnet man daher diesen letztern Quotienten durch Q und setzt man in ihm für A und B ihre aus den Gleichungen (1. d) Ziffer X. genommenen Werthe, so findet man

$$Q = \frac{v' (m^3 - v' v'^2)}{m^2 (v' m - v''^2)} \quad (1. a)$$

und es stellt Q das Verhältniss vor, in welchem das Quadrat der auf der Hauptnormalebene senkrechten Halbaxe zu dem der mit dieser Ebene parallelen Axe steht. Wir wollen uns nun die Frage vorlegen, bei

welchem Schnitt der Krystallplatten dieser Quotient einen grössten oder kleinsten Werth annimmt, welches bekanntlich dann geschieht, wenn seine nach a genommene Ableitung null wird, also wenn

$$(1. b) \quad -\frac{v'v''^2(m^3 - 3v'^2m + 2v'v''^2)\partial m}{m^3(v'm - v''^2)^2} = 0$$

ist, worin sich das Ableitungszeichen ∂ auf die Grösse a bezieht; aus $m^2 = v''^2 \sin^2 a + v'^2 \cos^2 a$ aber findet man durch Ableiten nach a

$$m\partial m = (v''^2 - v'^2) \sin a \cos a,$$

woraus sich ergibt

$$\partial m = \frac{(v''^2 - v'^2) \sin a \cos a}{m},$$

und hierdurch geht die Gleichung (1. b) über in:

$$(1. c) \quad \frac{v'v''^2(v''^2 - v'^2) \sin a \cos a (m^3 - 3v'^2m + 2v'v''^2)}{m^4(v'm - v''^2)^2} = 0.$$

Da nun in doppeltbrechenden Krystallen weder v' , v'' , $v''^2 - v'^2$ noch m oder $v'm - v''^2$ je null werden können, so zerfällt diese letzte Gleichung in die folgenden zwei:

$$(2. a) \quad \text{entweder } \sin a \cos a = 0 \quad \text{oder} \quad m^3 - 3v'^2m + 2v'v''^2 = 0.$$

Der ersten von diesen zwei Bedingungen wird genügt durch

$$(2. b) \quad a = 0^\circ \quad \text{oder} \quad a = 90^\circ,$$

und aus der zweiten findet man

$$(2. c) \quad m = \sqrt[3]{(-v'v''^2 + v'(v''^4 - v'^4)\frac{1}{2})} + \sqrt[3]{(-v'v''^2 - v'(v''^4 - v'^4)\frac{1}{2})}.$$

Setzt man in der Gleichung (1. a) $a = 0$, was $m = \pm v'$ zur Folge hat, so gibt der positive Werth von m

$$(3. a) \quad Q = +1$$

und zeigt damit an, dass A und B einerlei Vorzeichen haben, dass also dieser Fall Ellipsen angehört, in welchen jene beiden Halbaxen einander gleich sind, die sonach in einen Kreis übergehen. Wollte man für m den negativen Werth $-v'$ setzen, so fände man $Q = -1$, und diess

gäbe zu erkennen, dass die Curve in diesem Falle eine Hyperbel werden müsste; weil aber dem in voriger Ziffer aufgefundenen dritten Verhalten zur Folge Hyperbeln nie mit einem negativen Werth von m verträglich sind, so haben wir diesen zweiten Werth von Q als einen unmöglichen auf der Seite liegen zu lassen. Setzt man hierauf $a = 90^\circ$, was $m = \pm v''$ zur Folge hat, so gibt der positive Werth von m

$$Q = -\frac{v'}{v''}, \quad (3. b)$$

und zeigt damit an, dass hier A und B entgegengesetzte Vorzeichen besitzen, dass also dieser Fall Hyperbeln angehört. Wollte man $m = -v''$ setzen, so fände man $Q = +\frac{v'}{v''}$ und diess gäbe zu erkennen, dass in diesem Falle Ellipsen sich zeigen müssten; weil aber bei Ellipsen m den Werth v'' nie erreichen, und darum auch den $-v''$ nie annehmen kann, dem in voriger Ziffer angegebenen fünften Verhalten gemäss, so muss auch dieser Fall als ein unmöglicher zur Seite gelegt werden. Setzt man endlich den aus der hintern Bedingung (2. a) für m^3 sich ergebenden Werth in den Zähler der Gleichung (1. a) ein, so findet man:

$$Q = 3 \frac{v'^2}{m^2}, \quad (3. c)$$

und da dieser Werth von Q für jedes mögliche m eine wesentlich positive Zahl ist, so folgt hieraus, dass alle in der hintern Bedingung (2. a) enthaltenen Fälle, falls sie einen reellen Inhalt haben, immer nur auf Ellipsen sich beziehen können.

Wollte man auch an der Hand der Differentialrechnung zusehen, welche von den verschiedenen Werthen von Q grösste und welche kleinste werden, so bliebe doch bei jeder dieser Wurzeln immer noch zu untersuchen übrig, ob sie auch einem möglichen Winkel a entspreche; man kann sich indessen gleich von vornherein überzeugen, dass keine von den reellen Wurzeln der hintern Gleichung (2. a) einen möglichen

Werth a zur Folge haben könne. Sucht man nämlich, um den Sturm'schen Satz in Anwendung bringen zu können, zwischen dem Ausdruck $m^3 - 3v'^2m + 2v'v''^2$, den wir X nennen werden, und zwischen dessen Ableitung $3m^2 - 3v'^2$, die X' heissen mag, (wofür man auch $m^2 - v'^2$ setzen kann, weil bei diesem Geschäfte jeder stets positive Factor weggeworfen werden kann) nach Art der Auffindung eines gemeinschaftlichen Factors die Reste auf, welche im Verlaufe dieser Handlung jedoch stets mit entgegengesetzten Vorzeichen genommen werden müssen, und die wir so durch X'' und X''' bezeichnen werden, so erhält man:

$$(4. a) \quad \begin{aligned} m^3 - 3v'^2m + 2v'v''^2 &= X, & m^2 - v'^2 &= X', \\ v'm - v''^2 &= X'', & v'^2 - v''^2 &= X'''. \end{aligned}$$

Setzt man nun in die Ausdrücke X, X', X'', X''' für m erstlich die besondern Werthe $-v'$ und $-\sqrt[3]{v'v''^2}$, so findet man bei $m = -v'$

$$(4. b) \quad \begin{aligned} X &= +2v'^3 + 2v'v''^2, & X' &= 0, \\ X'' &= -(v'^2 + v''^2), & X''' &= v'^2 - v''^2 \end{aligned}$$

und bei $m = -\sqrt[3]{v'v''^2}$

$$(4. c) \quad \begin{aligned} X &= 3v'^2\sqrt[3]{v'v''^2} + v'v''^2, & X' &= \sqrt[3]{v'^2v''^4} - v'^2, \\ X'' &= -v'\sqrt[3]{v'v''^2} - v''^2, & X''' &= v'^2 - v''^2. \end{aligned}$$

Von den erstern besondern Werthen von X, X', X'', X''' wird der erste immer positiv, der dritte immer negativ und der vierte positiv oder negativ, je nachdem $v' > v''$ oder $v' < v''$ ist, d. h. je nachdem man es mit einem positiven oder negativen Krystall zu thun hat. Diese Eigenthümlichkeit stellen wir so dar:

$$m = -v' : \begin{array}{cccc} X, & X', & X'', & X''' \\ + & 0 & - & + \end{array}$$

wo von den doppelten Vorzeichen das obere stets bei positiven, das untere bei negativen Krystallen genommen werden muss. Was die letztern

besondern Werthe von X , X' , X'' , X''' betrifft, so ist der erste stets positiv, der dritte stets negativ, der vierte, wie schon bemerkt, positiv oder negativ, je nachdem man es mit einem positiven oder negativen Krystall zu thun hat, und der zweite ist negativ oder positiv, je nachdem er sich auf einen positiven oder negativen Krystall bezieht, wovon man sich leicht überzeugen kann; denn man kann dieses X' auch so schreiben: $v'v''\sqrt[3]{\frac{v''}{v'}} - v'^2$, ist also der Krystall ein positiver, in welchem $v' > v''$ ist, so ist bei ihm $\sqrt[3]{\frac{v''}{v'}} < 1$ und in Folge $v''\sqrt[3]{\frac{v''}{v'}} < v''$ und um so mehr $v''\sqrt[3]{\frac{v''}{v'}} < v'$, somit $v'v''\sqrt[3]{\frac{v''}{v'}} < v'^2$, und also $\sqrt[3]{v'^2v''^4} - v'^2$ stets negativ, ist aber der Krystall ein negativer, in welchem stets $v' < v''$ ist, so ist bei diesem stets $\sqrt[3]{\frac{v''}{v'}} > 1$ und in Folge $v''\sqrt[3]{\frac{v''}{v'}} > v''$ und um so mehr $v''\sqrt[3]{\frac{v''}{v'}} > v'$, somit $v'v''\sqrt[3]{\frac{v''}{v'}} > v'^2$, und also $\sqrt[3]{v'^2v''^4} - v'^2$ stets positiv. Diese Eigenthümlichkeit der letztern besondern Werthe von X , X' , X'' , X''' stellen wir so dar:

$$m = -\sqrt[3]{v'v''^2}: \frac{X, X', X'', X'''}{+, +, -, \pm}$$

wo wieder bei doppelten Vorzeichen das obere den positiven, das untere den negativen Krystallen entspricht. Positive Krystalle theilen sonach den Ausdrücken X , X' , X'' , X''' für $m = -v'$ zwei Abwechselungen mit und eben so viele für $m = -\sqrt[3]{v'v''^2}$; negative Krystalle hingegen geben denselben Ausdrücken bei $m = -v'$, sowohl wie bei $m = -\sqrt[3]{v'v''^2}$ nur eine Abwechselung, woraus folgt, dass bei positiven wie bei negativen Krystallen nie eine reelle Wurzel zwischen $-v'$ und $-\sqrt[3]{v'v''^2}$ liegt,

und dann zieht das in der vorigen Ziffer erwiesene Verhalten nach sich, dass diese negative Wurzel nie auf einen reellen Werth von a hinführt, sonach dass in keiner Krystallplatte das in (3. c) mitgetheilte, zu dieser negativen Wurzel gehörige Grösste oder Kleinste sich je verwirklichen kann.

Setzen wir jetzt noch in die Gleichungen (4. a) an die Stelle von m einmal v' und ein andermal $\sqrt[3]{v'v''^2}$, so werden sie bei $m = v'$:

$$X = -2v'^3 + 2v'v''^2, \quad X' = 0, \quad X'' = v'^2 - v''^2, \quad X''' = v'^2 - v''^2$$

und bei $m = \sqrt[3]{v'v''^2}$:

$$X = -3v'^2 \sqrt[3]{v'v''^2} + 3v'v'', \quad X' = \sqrt[3]{v'^2v''^4} - v'^2,$$

$$X'' = v' \sqrt[3]{v'v''^2} - v''^2, \quad X''' = v'^2 - v''^2,$$

und hieraus ergeben sich ganz in der gleichen Weise eine zuvor die beiden folgenden Schemata:

$$\begin{array}{c} X, \quad X', \quad X'', \quad X''' \\ m = v', \quad +, \quad 0, \quad +, \quad + \end{array}$$

und

$$\begin{array}{c} X, \quad X', \quad X'', \quad X''' \\ \text{bei } m = \sqrt[3]{v'v''^2} \quad +, \quad +, \quad +, \quad + \end{array}$$

welche beide sowohl in positiven, als in negativen Krystallen und eben so an der Grenze, wo $m = v'$, wie an der, wo $m = \sqrt[3]{v'v''^2}$ ist, immer nur eine einzige Abwechselung aufweisen und dadurch zeigen, dass in positiven Krystallen so wenig, wie in negativen zwischen v' und $\sqrt[3]{v'v''^2}$ eine reelle Wurzel liegen kann. Dann aber sagt das in voriger Ziffer aufgefundene vierte Verhalten aus, dass auch die positiven Wurzeln der hintern Gleichung (2. a) in keiner möglichen Krystallplatte Grösste oder Kleinste von der in (3. c.) angegebenen Art verwirklichen können.

Die in (3. a) und (3. b) für Q erhaltenen Grössen sind offenbar bloss Grenzwerte, nicht eigentliche Grösste oder Kleinste, und die so eben beendigte Untersuchung hat gezeigt, dass es neben diesen auch keine andern grösste oder kleinste Werthe von Q gebe. Hieraus nun lässt sich in Betreff der möglichen in einaxigen Krystallplatten stattfindenden Uebergänge der Formen der Interferenzerscheinungen das folgende mit aller Sicherheit behaupten. Da der in (1. a) enthaltene Quotient Q offenbar null wird an der Stelle, wo $m^3 = v'v''^2$ ist, d. h. in Platten, worin Parabeln sich zeigen, und in keinen andern Platten Q grösste oder kleinste Werthe erhält, so muss Q von den beiden Grenzen (3. a) und (3. b) aus, welche den Werthen $a = 0^\circ$ und $a = 90^\circ$ entsprechen, nach dem durch die Gleichung (2. b) Ziffer XI. gegebenen, der Parabel entsprechenden Werth von a hin, der Quotient Q d. h. das Verhältniss des Quadrats des auf der Hauptnormalebene senkrechten Durchmessers der Mittelpunktcurve zu dem Quadrat des mit der Hauptnormalebene parallelen Durchmessers der Null stets näher rücken, auf der einen Seite durch lauter positive Werthe, auf der andern Seite durch lauter negative Werthe hindurch, bis es zuletzt in der Parabelplatte in Null wirklich übergeht. *Es können sich mithin in keiner Platte Ellipsen bilden, deren auf der Hauptnormalebene senkrechte Axe grösser als die mit dieser Ebene parallele Axe wäre, und eben so wenig können je in einer Platte Hyperbeln entstehen, in welchen das Verhältniss zwischen den Quadraten der grossen und kleinen Axe mit positivem Vorzeichen genommen, den Quotienten $\frac{v'}{v''}$ oder $\frac{v''}{v'}$ überschreiten könnte, jenen bei den Hyperbeln der ersten Art, diesen bei den Hyperbeln der zweiten Art.*

XIX. Bevor wir den mit den Formen der Helligkeitscurven sich beschäftigenden Theil dieser Abhandlung beschliessen, müssen wir noch eine hierauf bezügliche Stelle näher in's Auge fassen. Der Umstand nämlich, dass unsere bisherigen Betrachtungen die Unmöglichkeit der Entstehung von geradlinigen Interferenzstreifen in einer einzigen ein-

axigen Krystallplatte ausser allen Zweifel gestellt haben, und dass doch dergleichen geradlinige Streifen erfahrungsmässig in manchen solchen Platten wahrgenommen werden, ist nur dann mit den Gesetzen der Logik vereinbar, wenn wir annehmen, dass unsere Sinne für gerade halten, was bloß annähernd gerade ist. Um auch diesen Punkt noch in's Klare zu bringen, wollen wir untersuchen, unter welchen Umständen die im Gesichtsfelde liegenden Helligkeitscurven den geringsten Grad der Krümmung haben müssen. Zuvörderst springt in die Augen, dass diess nur solche Curven seyn können, deren Mittelpunkt weit ausserhalb der Mitte des Gesichtsfeldes liegt, weil ausserdem ihre Krümmung in die Sinne fallen muss. Stellen nun μ^2 und ν^2 die Quadrate der halben grossen und kleinen Axe einer Mittelpunktscurve vor, so ist bekanntlich $\frac{\nu^2}{\mu}$ der Krümmungshalbmesser dieser Curven, sie mag eine Ellipse oder Hyperbel seyn, an den Stellen, wo ein Endpunkt ihrer grossen Axe hinfällt, welche Stellen gerade die sind, die in der Richtung der Hauptnormalebene liegen, und eben darum in einem Durchmesser des Gesichtsfeldes dem Auge sich darbieten. Diesem Krümmungshalbmesser können wir zunächst auch in der Form $\frac{\nu^2}{\mu^2} \cdot \mu$ schreiben und dann hierfür

Q. E

setzen, weil Q im Sinne der vorigen Ziffer das Verhältniss des Quadrats der halben kleinen Axe zum Quadrat der halben grossen Axe also $\frac{\nu^2}{\mu^2}$ bezeichnet, und E im Sinne der Ziffer X. den Abstand des Curvenmittelpunktes von der Mitte des Gesichtsfeldes also μ vorstellt, wenn wir die Curve vor Augen haben, welche durch die Mitte des Gesichtsfeldes hindurch läuft. Setzen wir für Q und E ihre in den angezeigten Ziffern mitgetheilten Werthe, so finden wir den Krümmungshalbmesser der Curven zunächst der Mitte des Gesichtsfeldes gegeben durch den Ausdruck:

$$\frac{1}{2} \frac{\nu (\nu'^2 - \nu^2) \sin. 2a}{m (\nu'm - \nu'^2)},$$

aus welchem sich die verschiedenen Krümmungsverhältnisse der im Gesichtsfelde wahrnehmbaren Heiligkeitscurven ableiten lassen müssen. Um hier möglichst kurz zu werden, kann man bemerken, dass da m stets zwischen v' und v'' liegen bleibt, und v' und v'' in allen bekannten doppeltbrechenden Krystallen nur sehr wenig von einander verschieden sind und zudem nie der Null sehr nahe zu liegen kommen, so wird dieses m im Nenner nur zu Aenderungen von verhältnissmässig sehr geringem Umfange Anlass geben können, zumal aus den in Ziffer XVII. angeführten Verhalten hervorgeht, dass $v'm - v''^2$ nie null werden kann. Es hängt also die Grösse des Krümmungshalbmessers der im Gesichtsfelde wahrgenommenen Stellen der Curven hauptsächlich von der Grösse des in obigem Ausdrucke vorkommenden Zählers ab, und dieser wird offenbar am grössten, wenn $2a = 90^\circ$ oder $a = 45^\circ$ ist. Es werden also die den geradlinigen am meisten sich annähernden Streifen in solchen Platten entstehen, deren Oberflächen einen Winkel von 45° mit der optischen Axe machen, und diess stimmt mit der Erfahrung vollkommen überein.

XX. Wir wollen nun noch einen besondern Fall in Betrachtung ziehen, der deswegen von ungewöhnlich hohem Interesse ist, weil er in der Experimentirkunst am häufigsten zum Vorschein kommt. In den gewöhnlichen Polarisationsapparaten nämlich, wo das vordere und hintere Polarisationsmittel keine grosse Ausdehnung haben, und zugleich weit von einander abstehen, kommen nur fast parallele, den beiden Polarisationsmitteln ausgesetzt gewesene Lichtstrahlen in's Auge, und aus dieser Besonderheit werden Modificationen in der Erscheinung hervorgehen müssen, die wir jetzt noch kennen lernen wollen. Unter den angegebenen Umständen bewegen sich alle doppelt polarisirten Lichtstrahlen fast ganz genau in der Richtung der Axe des Polarisationsinstruments. Fände der Parallelismus aller Strahlen mit der Axe des Instruments in voller Strenge statt, so wären alle Werthe i in der Gleichung

(5) der Ziffer VII. völlig constant, in welcher Stellung auch die Krystallplatte diesen Strahlen dargeboten werden möchte, und alle Einfallsebenen wären unter sich parallel und bildeten deswegen mit der Hauptnormalebene einen und denselben Winkel ω ; wenn aber i und ω in jener Gleichung unveränderliche Werthe annehmen, so ist deren ganze rechte Seite bei einer bestimmt gegebenen Krystallplatte eine durchaus gegebene Grösse, und sie gibt für Θ einen einzigen, gänzlich bestimmten Werth, der aus einer bestimmt gegebenen ganzen Zahl α und aus einem bestimmt gegebenen echten Bruche η zusammengesetzt seyn wird. Wird der so erhaltene echte Bruch η in die Näherungsgleichung (2. b) der Ziffer XIII. eingesetzt, so gibt er für A^2 einen nur mit der Stellung der beiden Polarisations Ebenen gegen einander und der Hauptnormalebene zu ihnen veränderlichen Werth und sagt damit aus, dass in der Platte keine Interferenzfiguren sich mehr zeigen, sondern dass sie mit einem gleichförmigen Lichte überzogen erscheint, das nur mit der Stellung ihrer Hauptnormalebene zu den Polarisations Ebenen, so wie mit der Stellung dieser zu einander sich ändert.

Da indessen der genaue Parallelismus aller Strahlen mit der Axe des Polarisationsinstruments in der Wirklichkeit nie herbeigeführt werden kann, so wollen wir noch den Einfluss einer geringen Abweichung davon auf die Erscheinung untersuchen, um die Mittel, sie in grösster Vollkommenheit hervorzurufen, kennen zu lernen. Es sey zu diesem Ende β der Winkel, den die Axe des Instruments mit der Normale zur Platte macht, und $\delta\beta$ die sehr kleine Aenderung dieses Winkels, wie sie der Richtung von einer Anzahl einfallender Strahlen entspricht. Ferner sey γ der Winkel, den die Einfallsebene der mit der Axe des Instruments genau parallelen Lichtstrahlen mit der Hauptnormalebene der Platte macht, und $\delta\gamma$ sey die sehr kleine Aenderung in diesem Winkel, wie sie den um $\delta\beta$ vom strengen Parallelismus abweichenden Strahlen entspricht, so ist für diese:

$\sin. i = \sin. (\beta + \delta\beta)$, $\sin. \omega = \sin. (\gamma + \delta\gamma)$, $\cos. \omega = \cos. (\gamma + \delta\gamma)$,
wofür man auch, weil $\delta\beta$ und $\delta\gamma$ äusserst kleine Grössen sind, setzen
kann:

$$\sin. i = \sin. \beta + \delta\beta \cos. \beta, \quad \sin. \omega = \sin. \gamma + \delta\gamma \cos. \gamma,$$

$$\cos. \omega = \cos. \gamma - \delta\gamma \sin. \gamma.$$

Setzt man diese Werthe von $\sin. i$, $\sin. \omega$ und $\cos. \omega$ in die Gleichung
(5) der Ziffer VII. und nennt man $\delta\Theta$ die Aenderung, welche der
Werth von Θ durch diesen nicht ganz genauen Parallelismus der Strah-
len erfährt, so gibt diese Gleichung $\Theta + \delta\Theta$ her, während sie Θ gibt,
wenn man in ihr blos $\sin. \beta$, $\sin. \gamma$, $\cos. \gamma$ für $\sin. i$, $\sin. \omega$, $\cos. \omega$ setzt;
man findet also diese Aenderung von Θ oder $\delta\Theta$, wenn man diese
letzte Gleichung von der zuvor erhaltenen abzieht. So erhält man die
Glieder der zweiten Dimension in Bezug auf $\delta\beta$ und $\delta\gamma$ vernach-
lässigend:

$$\delta\Theta = T \left[\frac{1}{2} \frac{v''^2 - v'^2}{v m^2} \sin. 2\alpha (\delta\beta \cos. \beta \cos. \gamma - \delta\gamma \sin. \beta \sin. \gamma) \right. \\ \left. - \frac{1}{2} \delta\beta \sin. 2\beta \left(\frac{v'}{v^2} - \frac{v''^2}{v^2 m} \sin^2. \gamma - \frac{v'^2 v''^2}{v^2 m^3} \cos^2. \gamma \right) \right. \\ \left. - \frac{1}{2} \delta\gamma \sin. 2\beta \sin. 2\gamma \left(\frac{v''^2}{v^2 m} - \frac{v'^2 v''^2}{v^2 m^3} \right) \right], \quad (1)$$

und hieraus geht hervor, dass die Aenderung von Θ einestheils von
der Grösse der Aenderungen $\delta\beta$ und $\delta\gamma$, die der Nichtparallelismus der
Lichtstrahlen hervorruft, in hohem Grade abhängt, anderntheils aber
auch und zwar in noch höhern Grade von der Grösse T , wodurch die
Dicke der Krystallplatte bezeichnet worden ist; man wird also die zuvor
gefundene gleichförmige Helligkeit der ganzen Platte um so weniger
beeinträchtigen, je mehr man für den möglichst genauen Parallelismus
sämmlicher Lichtstrahlen Sorge trägt, und in noch grösserm Masse da-
durch, dass man zu dergleichen Versuchen möglichst dünne Platten
nimmt. Daher kommt es auch, dass man zu diesen Versuchen vorzugs-
weise solche Krystalle auswählt, die sich von Natur in lauter Blätter
spalten, weil so sich dünnere als auf jedem andern Wege erhalten lassen.

Hierbei pflegt man, um der Platte verschiedene Stellungen zur Axe des Polarisationsinstrumentes geben zu können, eine solche Einrichtung zu treffen, dass sich dieselbe um eine senkrecht auf ihrer Hauptnormalebene stehende Gerade, welche senkrecht gegen die Axe des Polarisationsinstrumentes gestellt ist, drehen lässt. In diesem Falle bleibt die Normale zur Platte und zugleich auch die optische Axe mit der Axe des Instruments stets in der gleichen Ebene liegen, so dass die Einfallsebenen aller mit der Axe des Instruments parallelen Strahlen mit der Hauptnormalebene der Platte den Winkel 0° oder 180° machen, also in jedem Falle $\sin^2 \gamma = 0$ und $\cos^2 \gamma = 1$, so wie auch $\sin 2\gamma = 0$ wird. Bei dieser besondern Anordnung des Apparates erhält man folglich aus der Gleichung (5) der Ziffer VII.

$$(2. a) \quad \Theta = T \left[\frac{1}{m} - \frac{1}{v'} \pm \frac{1}{2} \frac{v''^2 - v'^2}{vm^2} \sin 2a \sin^2 \beta + \frac{1}{2} \sin \beta \left(\frac{v'}{v^2} - \frac{v'^2 v''^2}{v^2 m^3} \right) \right]$$

und die eben erhaltene Gleichung (1) wird:

$$(2. b) \quad \delta \Theta = T \left[\pm \frac{1}{2} \frac{v''^2 - v'^2}{vm^2} \sin 2a \cos \beta \delta \beta - \frac{1}{2} \delta \beta \sin 2\beta \left(\frac{v'}{v^2} - \frac{v'^2 v''^2}{v^2 m^3} \right) \right].$$

Diese Ausdrücke werden in besondern Platten noch viel einfacher. Stehen z. B. die Oberflächen der Platte senkrecht zur optischen Axe, wo dann $\sin 2a = 0$ und $m = v'$ wird, so nehmen die beiden vorstehenden Gleichungen die Form an:

$$(3. a) \quad \Theta = T \cdot \frac{1}{2} \sin^2 \beta \cdot \left(\frac{v'}{v^2} - \frac{v''^2}{v^2 v'} \right)$$

und

$$(3. b) \quad \delta \Theta = - T \cdot \frac{1}{2} \delta \beta \sin 2\beta \left(\frac{v'}{v^2} - \frac{v''^2}{v^2 v'} \right),$$

oder laufen die Oberflächen der Platte mit der optischen Axe parallel, in welchem Falle wieder $\sin 2a = 0$, dagegen $m = v''$ wird, so gehen jene Gleichungen über in:

$$(4. a) \quad \Theta = T \cdot \frac{1}{2} \sin^2 \beta \left(\frac{v'}{v^2} - \frac{v'^2}{v^2 v''} \right)$$

und

$$(4. b) \quad \delta \Theta = -T. \frac{1}{2} \delta \beta \sin. 2\beta \left(\frac{v'}{v^2} - \frac{v'^2}{v^2 v''} \right).$$

Stehen die Oberflächen der Platte senkrecht zur optischen Axe, in welchem Falle die Gleichungen (3. a) und (3. b) ihre Anwendung finden, und hat die Platte eine senkrechte Stellung zur Axe des Polarisationsinstrumentes erhalten, so ist $\beta = 0$ und dann liefern diese Gleichungen sowohl $\Theta = 0$ als auch $\delta \Theta = 0$, und sagen damit aus, dass diese Platten selbst in dem hier verfolgten hohen Grade der Annäherung vollkommen wirkungslos sind.

XXI. Nachdem wir die verschiedenen möglichen Formen der Helligkeitscurven in erschöpfender Weise auseinandergelegt haben, können wir nun noch den Grad der in ihnen vorhandenen Helligkeit auf viel kürzere Art ermitteln, wozu die in Ziffer VIII. und IX. vorgenommenen Untersuchungen alles Erforderliche an die Hand geben. Die in Ziffer VIII. aufgestellte Gleichung (6. c) lehrt die einem bestimmten Werth von Θ entsprechende Helligkeit an den verschiedenen Stellen der Curve vollkommen genau zu finden, und in der Ziffer IX. ist erwiesen worden, dass wir in dieser Gleichung $\chi = 0$ setzen dürfen, ohne einen andern Fehler zu begehen, als einen der zweiten Ordnung in Bezug auf $\sin. i$, und dass wir bei diesem Grade der Annäherung den dortigen Gleichungen (3. b) zur Folge $\omega_1 + \mu$ und $\omega_1 + \mu - A$ an die Stelle von φ_1 und φ_2 setzen können, wodurch die eben angerufene Gleichung (6. c) wird:

$$A^2 = a^2 [\cos^2. A - \sin. 2(\omega_1 + \mu) \sin. 2(\omega_1 + \mu - A) \sin^2. \pi \Theta]$$

wird, oder, wenn wir Θ in der Form $\alpha + \eta$ schreiben

$$A^2 = a^2 [\cos^2. A - \sin. 2(\omega_1 + \mu) \sin. 2(\omega_1 + \mu - A) \cos^2. \pi \eta], \quad (1)$$

worin ω_1 das Azimuth der vordern Polarisationssebene zur Hauptnormalebene vorzustellen hat. Aber selbst diesen Grad der Genauigkeit haben wir doch mehr zur Aufklärung eines wissenschaftlichen Curiosums, als

weil das Gros der Erscheinungen ihn schlechterdings verlangt, eingehalten und bis an's Ende verfolgt. Im Allgemeinen kann man bei Erscheinungen dieser Art schon die kleine Grösse μ , welche von der ersten Ordnung in Bezug auf $\sin i$ ist, wie die dortige Gleichung (3. a) aussagt, vernachlässigen, so lange wenigstens, als a nicht der Null nahe kommt, wo dann die Gleichung (1) übergeht in:

$$(2. a) \quad A^2 = a^2 [\cos^2 A - \sin 2\omega_1 \sin 2(\omega_1 - A) \sin^2 \pi\eta]$$

oder

$$(2. b) \quad A^2 = a^2 [\cos^2 A - \frac{1}{2} (\cos 2A - \cos (4\omega_1 - 2A)) \sin^2 \pi\eta].$$

Auf dem gleichen Grade der Genauigkeit findet man diejenigen Werthe von ω , welche die Helligkeit A^2 zu einer grössten oder kleinsten machen, mittelst der schon in Ziffer IX. unter (5. e) angegebenen Gleichung:

$$(2. c) \quad \omega_1 = \frac{1}{2} A + \frac{1}{4} a\pi,$$

wobei a ein Repräsentant für jede ganze Zahl ist, und es ist unschwer einzusehen, dass diejenigen Werthe von ω_1 , wobei a null oder eine gerade Zahl ist, grösste Helligkeiten liefern, jene hingegen, die zu einer ungeraden Zahl a gehören, kleinste; denn in jenem Falle wird $\cos (4\omega_1 - 2A) = +1$, in diesem aber wird $\cos (4\omega_1 - 2A) = -1$. Die Helligkeitscurven erscheinen demnach in ihrem grössten Glanze, wenn die Krystallplatte im Apparate so liegt, dass ihre Hauptnormalebene mitten zwischen die beiden Polarisationssebenen nach der einen oder andern Seite hin fällt, oder um einen rechten Winkel davon abweicht; sie treten aber in ihrem geringsten Glanze auf, jedesmal wenn die Hauptnormalebene der Platte eine mittlere Stellung zwischen den so eben angezeigten Richtungen des grössten Glanzes einnimmt, und es lässt sich leicht aus der Gleichung (1) entnehmen, dass beim allmäligen Uebergang der Hauptnormalebene aus einer der Richtungen des grössten Glanzes in die ihr nächst liegende des geringsten Glanzes eine successive und stets gleichartige Abänderung der einen Erscheinung bis in die an-

dere vor sich gehen müsse, so wie auch wenn die Hauptnormalebene aus einer der letztern Richtungen in eine der erstern ihr nächst anliegende übergeführt wird.

Eine Ausnahme von dieser allgemeinen Regel machen in gewisser Weise jene Krystallplatten, deren Oberflächen senkrecht zur optischen Axe stehen. Diese haben unzählig viele Hauptnormalebenen, weil bei ihnen die optische Axe zugleich auch die Normale zur Platte ist, und desshalb jede Einfallsebene immer auch eine Hauptnormalebene der Platte wird, und diese vielen Hauptnormalebenen ändern ihre Richtung nicht, wenn schon die Platte um die Axe der Erscheinung gedreht wird. Während bei andern Platten der Winkel ω_1 sich stets ändert, wenn die Platte um ihre Normale gedreht wird, bleibt er hier bei jeder Lage der Platte stets der gleiche, ändert sich dagegen von einer Einfallsebene zur andern ab. In den jetzigen Platten ändern sich daher die Helligkeitsverhältnisse auch nicht mehr wie bei den andern dadurch ab, dass die Platte um die Axe der Erscheinung oder um ihre Normale gedreht wird, dagegen verändern sie sich von einer Einfallsebene zur andern, d. h. von einer aus der Mitte des Gesichtsfeldes auslaufenden Richtung zur andern. Uebrigens bleiben die Richtungen des grössten und geringsten Glanzes hier völlig die gleichen wie dort, nur beziehen sie sich jetzt nicht mehr auf die Hauptnormalebene, weil es eine solche hier nicht mehr gibt, sondern auf die vielerlei Einfallsebenen oder auf die verschiedenen von der Mitte des Gesichtsfeldes auslaufenden Richtungen. Man findet hier nämlich den grössten Glanz in jenen Richtungen, die mitten zwischen den beiden Polarisationsrichtungen liegen, oder um 90° davon abstecken, und das wenigste Licht in den Richtungen, die mitten zwischen denen des grössten Glanzes liegen.

Setzt man in die Gleichung (2. a) für ω_1 die den grössten Helligkeiten entsprechenden Werthe ein, so werden diese:

$$A^2 = a^2 [\cos^2 A + \frac{1}{2}(1 - \cos 2A) \sin^2 \pi \eta] \quad (3. a)$$

und setzt man in dieselbe Gleichung für ω_1 die den geringsten Helligkeiten entsprechenden Werthe ein, so findet man für diese:

$$(3. b) \quad A^2 = a^2 [\cos^2 A - \frac{1}{2} (1 + \cos 2A) \sin^2 \eta \pi].$$

In den Gleichungen (2. a) oder (2. b) ist übrigens je nach der Grösse des in ihnen vorkommenden Winkels A eine grosse Mannigfaltigkeit der Erscheinungen enthalten, wie jetzt noch an einigen Beispielen gezeigt werden soll. Ist nämlich erstlich $A = 0^\circ$ oder $A = 180^\circ$, d. h. laufen die beiden Polarisations Ebenen parallel mit einander, so nehmen jene Gleichungen die folgende Gestalt an:

$$(4. a) \quad A^2 = a^2 [1 - \sin^2 2\omega_1 \sin^2 \eta \pi];$$

ist aber zweitens $A = 90^\circ$, d. h. stehen die beiden Polarisations Ebenen senkrecht auf einander, so werden sie:

$$(4. b) \quad A^2 = a^2 \sin^2 2\omega_1 \sin^2 \eta \pi;$$

und ist endlich $A = 45^\circ$, d. h. machen die beiden Polarisations Ebenen einen halben rechten Winkel mit einander, so liefern sie, weil $\cos(4\omega_1 - 90^\circ) = \sin 4\omega_1$ ist

$$(4. c) \quad A^2 = \frac{1}{2} a^2 (1 + \sin 4\omega_1 \sin^2 \eta \pi).$$

Addirt man die Gleichungen (4. a) und (4. b) zu einander, so erhält man zur Summe a^2 , und diess gibt zu verstehen, dass sich in diesen beiden Fällen die Helligkeiten der zu einerlei η gehörigen Curven zu der constanten Grösse a^2 ergänzen, dass also die Erscheinungen bei senkrechten und bei parallelen Polarisations Ebenen unter übrigens gleichen Umständen complementäre sind. *) Setzt man in der Gleichung

*) Es ist a^2 die Helligkeit des auf die Platte einfallenden Lichtes, begreiflicherweise jedoch nach Abzug des Verlustes, den es während seines Fortgangs bis zum Auge durch Trübung erleidet, welche von den Körpern, die es durchzieht, herrührt, und die von Seiten der Polarisationsmittel oft sehr beträchtlich ist.

(4. c) $\omega_1 + 45^\circ$ an die Stelle von ω_1 , und erwägt man, dass $\sin.4(\omega_1 + 45^\circ) = -\sin.4\omega_1$ ist, so verwandelt sie sich in:

$$A^2 = \frac{1}{2}a^2 [1 - \sin.4\omega_1 \sin^2.\eta\pi], \quad (4. d)$$

und da diese Gleichung zu der (4. c) addirt, bei einerlei Werth von η zur Summe wieder a^2 gibt, so erkennt man hieraus, dass die derselben Helligkeitscurve entsprechenden, aber um 45° von einander verschiedenen Werthen von ω_1 angehörigen Stellen eine complementäre Helligkeit besitzen, dass also complementäre Interferenzfiguren entstehen, wenn die beiden Polarisations Ebenen unter 45° gegen einander gestellt werden, und zwar: in Platten, deren Oberflächen nicht senkrecht zur optischen Axe stehen, in je zwei Fällen, wo deren Hauptnormalebene eine um 45° verschiedene Lage eingenommen, oder mit andern Worten, wo die Platte eine Drehung von 45° um die Axe der Erscheinung erlitten hat; in Platten dagegen, deren Oberflächen senkrecht zur optischen Axe stehen, tritt in Folge der vorhin an diesen wahrgenommenen besondern Eigenthümlichkeit die complementäre Beschaffenheit der zu einerlei Curve gehörigen Stellen, ohne dass die Platte eine Lagenänderung erfährt, schon in einem und demselben Bilde ein, nämlich in je zwei von der Mitte des Gesichtsfeldes auslaufenden Richtungen, die um 45° von einander verschieden sind. Dieser letztere Umstand theilt den in senkrecht zur Axe geschnittenen Platten sichtbar werdenden Bildern, da wo die Polarisations Ebenen einen Winkel von 45° mit einander einschliessen, die überraschende Eigenschaft mit, dass sie in 8 Sektoren zerfallen, die paarweise neben einander liegend complementäre Helligkeiten besitzen.

XXII. Es lassen sich aus den Intensitätsgleichungen gewisse allgemeine Eigenschaften der in Krystallplatten entstehenden Interferenzfiguren ableiten, von denen wir ein paar hier noch zur Sprache bringen wollen. Setzt man erstlich in die Gleichung (2. a) der vorigen Ziffer $\omega_1 \pm 90^\circ$ an die Stelle von ω_1 , so wird sie, weil $\sin.2(\omega_1 \pm 90^\circ) = -\sin.2\omega_1$

ist, und mit ω_1 zugleich auch α sich um $\pm 90^\circ$ abändert, wenn ausser der vordern Polarisationsebene weder die Krystallplatte, noch die hintere Polarisationsebene ihre Lage ändert, also $\sin. 2 (\omega_1 - A)$ dabei völlig ungeändert bleibt, hingegen $\cos. A$ in $\cos. (A \pm 90^\circ)$, welches gleich $\mp \sin. A$ ist, übergeht, die folgende Gestalt annehmen:

$$(1. a) \quad A^2 = a^2 [\sin^2. A + \sin. 2\omega_1 \sin. 2 (\omega_1 - A) \sin^2. \eta\pi],$$

und da diese Helligkeit zu der in (2. a) der vorigen Ziffer enthaltenen addirt zur Summe a^2 gibt, so sieht man, dass wenn gleichzeitig zwei rechtwinklig auf einander polarisirte und gleich starke Lichter durch die Platte hindurchgehen und mittelst des hintern Polarisationsmittels in's Auge übergeführt werden, diese an jeder Stelle der Interferenzfigur sich zu a^2 ergänzen, so dass keine dieser Stellen sich von einer andern zu unterscheiden vermag und in Folge die Interferenzfigur selber zu existiren aufhören muss. Hieraus erklärt sich, warum zur Entstehung der Interferenzfiguren durchaus eine vorläufige Polarisation des auf die Platte fallenden Lichtes nach einer bestimmten Richtung erforderlich ist, und warum alle in Krystallplatten wahrzunehmenden Interferenzfiguren gänzlich verschwinden, so wie man aus dem zu ihrer Erzeugung dienenden Apparate das vordere Polarisationsmittel weglässt. Ist nämlich, wie man allgemein annimmt, im gewöhnlichen Tageslichte ein gleicher Antheil nach allen Richtungen hin polarisirten Lichtes vorhanden, so findet jedes nach einer bestimmten Richtung hin schwingende Licht einen gleichen Antheil solchen Lichtes, dessen Schwingungsrichtung senkrecht auf der vorigen steht, die Polarisationsebenen dieser beiden Antheile weichen also um 90° von einander ab, und aus diesem Grunde wird dem eben Gesagten gemäss die Fähigkeit des einen dieser beiden Antheile, seine Wirkungen in Figuren zu gruppiren, durch den andern Antheil gänzlich aufgehoben. *Weil nun das nichtpolarisirte Licht, selbst wenn es ein sogenanntes einfaches ist, als eine Summe von lauter solchen Paaren gleich starker und rechtwinklig auf einander polarisirter Lichtantheile*

angesehen werden muss, so verliert es eben dieses Umstandes halber ganz und gar die Fähigkeit, Interferenzfiguren zu erzeugen.

Lassen wir die vordere Polarisationssebene und die Krystallplatte unverändert in ihrer Stellung liegen, drehen aber die hintere Polarisationssebene, bis sie ihre Lage um einen rechten Winkel abgeändert hat, so ändert diess in der Grösse ω_1 nichts, die Grösse A dagegen erleidet dadurch eine Veränderung von $\pm 90^\circ$; setzt man aber $A \pm 90^\circ$ an die Stelle von A in die Gleichung (2. a) der vorigen Ziffer, so wird sie, weil $\cos.(A \pm 90^\circ) = \mp \sin.A$ und $\sin.2(\omega_1 - (A \pm 90^\circ)) = -\sin.2(\omega_1 - A)$ ist:

$$A^2 = a^2 [\sin^2.A + \sin.2\omega_1 \sin.2(\omega_1 - A) \sin^2.\eta\pi] \quad (1. b)$$

also genau die gleiche, wie die in (1. a) erhaltene; es werden daher hier wie dort gleichliegende Punkte mit jenen, welche die in (2. a) der vorigen Ziffer enthaltene Erscheinung hergeben, complementäre Helligkeiten besitzen müssen. Hieraus folgt ganz allgemein, dass zwei Interferenzbilder, von denen das eine bei einer beliebigen Lage der Platte und der beiden Polarisationssebenen zu einander, das andere bei der gleichen Lage der Platte und der vordern Polarisationssebene, aber einer um 90° abgeänderten, der hintern Polarisationssebene erhalten wird, complementäre Helligkeiten besitzen, wie schon aus den Gleichungen (4. a) und (4. b) in einem besondern Falle abgeleitet worden ist.

Denken wir uns endlich in der Gleichung (2. b) der vorigen Ziffer den Winkel A stets von derselben Grösse bleibend, für ω_1 aber in dieselbe $A - \omega_1$ gesetzt, so bleibt sie, weil

$$\cos.[4(A - \omega_1) - 2A] = \cos.(-4\omega_1 + 2A) = \cos.(4\omega_1 - 2A)$$

ist, nach dieser Substitution doch noch völlig dieselbe, und diess beweist, dass die Interferenzerscheinung, wie sie bei einer beliebigen Lage

der beiden Polarisations Ebenen zu einander und der Hauptnormalebene der Platte zu diesen sich zeigt, die gleiche bleibt, wenn an dem Apparate nichts geändert wird, als dass die Hauptnormalebene der Platte in die andere Lage gebracht wird, wobei sie mit der vordern Polarisations-ebene einen Winkel macht, der den zuvor damit gemachten zu A ergänzt. In diesem eben so allgemeinen wie niedlichen Satze liegt der Grund, warum die in Platten, deren Oberflächen senkrecht zur optischen Axe stehen, gebildeten Interferenzfiguren aus 4 symmetrischen Quadranten zusammengesetzt sind, wenn die beiden Polarisations Ebenen senkrecht auf einander stehen oder mit einander parallel laufen, und aus 8 symmetrischen Octanten, wenn die beiden Polarisations Ebenen einen Winkel von 45° einschliessen.

XXIII. Es braucht jetzt kaum mehr bemerkt zu werden, dass alle in den zwei vorigen Ziffern besprochenen Eigenthümlichkeiten der Interferenzerscheinungen in Krystallplatten, welche den Grad ihrer Helligkeit angehen, ganz eben so auch bei jenen Erscheinungen stattfinden, von denen in Ziffer XX. die Rede war, und die aus einem eigens dazu eingerichteten Polarisationsapparate entspringen. Der ganze Unterschied zwischen ihm und dem bei Versuchen mit dicken Platten benützten liegt eigentlich bloß darin, dass wo dieser eine Menge abwechselnder Reihen von verschieden erleuchteten Punkten sehen lässt, jener bloß einige wenige Stellen von den gedachten Reihen dem Auge darbietet, die so nahe bei einander liegen, dass sich an ihnen weder eine Ungleichheit ihres Hellseins, noch ein besonderer Modus ihrer Anordnung erkennen lässt. Die Helligkeitsänderungen aber, welche von der Lage der beiden Polarisations Ebenen gegen einander und der Hauptnormalebene der Platte zu ihnen abhängen, haben die beiderlei Apparate ganz in der gleichen Weise mit einander gemein, und in ersterem entspringen noch Veränderungen aus einer Drehung der Platte um eine auf der Axe des Instruments senkrechte Gerade, welche Drehung in gewisser Weise das

vermittelt, was bei dem andern Apparate Folge des von allen Seiten her schief einfallenden Lichtes ist.

XXIV. Am Schlusse dieser Abtheilung müssen wir nun noch den Grund angeben, warum die bisher besprochenen Erscheinungen sich in Versuchen mit gewöhnlichen Tageslichte entweder gar nicht, oder doch nur in seltenen Fällen und dann noch in einer sehr abgeänderten Weise wahrnehmen lassen. Unsere Rechnung nämlich ist von der Voraussetzung ausgegangen, dass die Grössen v , v' und v'' in obigen Formeln stets die gleichen Werthe besitzen, deswegen können die Rechnungsergebnisse nur dann in dem Versuche sich bewähren, wenn dieser mit lauter solchem Lichte angestellt wird, dessen Geschwindigkeiten in der Luft und im Krystall fortwährend die gleichen Masse einhält, was indessen weder bei dem gewöhnlichen Tageslichte, noch bei dem meisten aus andern Quellen herstammenden Lichte der Fall ist. Die von unserer Theorie mit aller wünschenswerthen Bestimmtheit vorausgesagten Erscheinungen werden jedoch genau mit den Versuchen übereinstimmen, wenn man sich dazu der Flamme von brennendem Weingeist, in dem zuvor Kochsalz aufgelöst worden ist, bedient, welche ein zwar schwaches und gelbes, aber doch zu allen diesen Versuchen sehr brauchbares Licht liefert. Um aber die Unbrauchbarkeit des meisten andern Lichts zu solchen Versuchen klar einsehen zu können, wird es nöthig, dass wir etwas weiter ausholen.

Newton, der grösste Physiker hienieden, wies zuerst nach, dass in dem Sonnenlichte verschiedene Bestandtheile, in bestimmten Verhältnissen unter einander verbunden, enthalten sind, die in unzähligen Abstufungen ein immer anderes Brechungsvermögen besitzen und sich schon dem blossen Auge durch ihre veränderte Färbung ankündigen. Trägt man diese Entdeckung über in die Sprache der Lichtwellentheorie, worin die verschiedene Brechung des Lichts auf die in Ziffer I. beschrie-

bene Weise von der Ungleichheit seiner Geschwindigkeit, mit welcher es sich in dem durchsichtigen Körper fortbewegt, abhängig gemacht wird, so sagt sie aus, dass im Sonnenlichte, wie auch in den meisten andern Lichtern, sich Lichtwellen von unendlich verschiedenen Wellenlängen vorfinden, und dass die einer jeglichen Länge entsprechende Anzahl der Wellen ein bestimmtes, in den verschiedenen Lichtern wechselndes Verhältniss einhält. Während sich also unsere Rechnung auf unveränderliche Werthe von v , v' , v'' stützt, zeigen sich in der Wirklichkeit unendlich viele solche zusammengehörige und stetig sich ändernde Werthe, welchen unzählig viele Ergebnisse entsprechen, wie sie von unserer Rechnung angezeigt worden sind, die mehr und mehr von einander abweichen und sich unter einander zu einem Gesammtresultat verbinden. Während so die zu einander gehörigen Grössen v , v' , v'' sich stets abändern, dürfen wir doch annehmen, dass ihr gegenseitiges Verhältniss dasselbe bleibe, so dass man den ganzen Umfang dieser Veränderungen zu überblicken vermag, wenn man den Umfang der Veränderungen von einer einzigen jener drei Grössen kennt. Fresnel hat in dieser Beziehung Versuche angestellt, die von unserm Fraunhofer noch weiter verfolgt worden sind, aus denen hervorgeht, dass in dem durch Luft sich fortbewegenden Sonnenlichte Wellen von solcher Länge vorkommen, dass deren weniger als 1454 auf einen Millimeter gehen, bis zu Wellen von solcher Länge hin, dass deren mehr als 2521 auf die gleiche Strecke gehen, und dass mit ganz unerheblichen Ausnahmen Wellen von allen zwischen den zwei angegebenen denkbaren Längen gefunden werden. Will man nun auch über die beiden mitgetheilten Grenzen nicht hinausgehen, so kann man doch die Gleichung (5) der Ziffer VII. (wenn man der Kürze wegen den ganzen in eckige Klammern gesetzten Ausdruck dieser Gleichung, der immer nur in engen Grenzen eingeschlossen bleibt, mit $\frac{A}{v}$ bezeichnet und an die Stelle von Θ dessen andere Form $\alpha + \eta$ setzt), jedenfalls so schreiben:

$$\alpha + \eta = \frac{T}{v} A, \quad (1. a)$$

und dieselbe zwischen den zwei Extremen, wo v einmal seinen, den längern Wellen entsprechenden Werth und ein andermal seinen, den kürzern Wellen entsprechenden Werth annimmt, beweglich sich denken, wobei man sicher seyn kann, die Grenzen nicht zu weit gesteckt zu haben. Hierbei stellt der Factor A eine für Wellen von jeglicher Länge constante Grösse vor, wie man sogleich einsieht, wenn man bedenkt, dass

$$\left. \begin{aligned} A = & \frac{v}{m} - \frac{v'}{v} + \frac{1}{2} \frac{v''^2 - v'^2}{m^2} \sin. 2a \cos. \omega \sin. i \\ & + \frac{1}{2} \sin^2. i \left(\frac{v'}{v} - \frac{v''^2}{vm} \sin^2. \omega - \frac{v'^2 v''^2}{vm^3} \cos^2. \omega \right) \end{aligned} \right\} \quad (1. b)$$

ist, sonach der Werth A blos von dem Verhältniss der Grössen v , v' , v'' zu einander, mit welchen auch m gleichen Schritt hält, aber nicht im Geringsten von deren absoluter Grösse abhängig ist. Man kann unter dem v der Gleichung (1. a) auch die Länge einer Lichtwelle in der Luft verstehen und demgemäss für die äussersten farbigen Strahlen

$$v = \frac{1}{1454} \text{ und } v = \frac{1}{2521}$$

seyn lassen, dann aber muss man sich die Dicke T der Platte in Millimetern ausgedrückt vorstellen, wie wir hier stets thun werden. Unter den gemachten Voraussetzungen liegt nun der Umfang der Gleichung (1. a) bezüglich der verschiedenen farbigen Lichtstrahlen annäherungsweise zwischen den zwei Grenzen:

$$\alpha + \eta = 1454 AT \text{ und } \alpha + \eta = 2521 AT. \quad (2. a)$$

Der in (1. b) niedergelegte Ausdruck A nimmt bei allen einaxigen Krystallen immer nur verhältnismässig kleine Werthe an, weil die Werthe v' und v'' in ihnen stets nahe bei einander liegen und m sich zwischen diesen beiden herum bewegt; nimmt man aber in Bezug auf eine bestimmte Stelle der Krystallplatte auch nur $A = 0,01$ und $T = 1$ an, so hat man doch schon an den Grenzen der Farbestrahlen:

$$\alpha + \eta = 14,54 \text{ und } \alpha + \eta = 25,21. \quad (2. b)$$

Um die Wirkungen des zusammengesetzten Lichts bei seinem Durchgang durch Krystallplatten recht deutlich machen zu können, finden wir uns bewogen, allbekannte Eigenschaften des Lichtes in nachbarliche Nähe zu einander zu bringen, um an sie jenen Hergang fest anknüpfen zu können. Denkt man sich (Fig. 6) einen Lichtstrahl AP, der aus mehreren farbigen Strahlen zusammengesetzt ist, auf die Krystallplatte MM in einer bestimmten Richtung einfallen, so spaltet sich derselbe bei seinem Eintritt in die Platte in so viele besondere Strahlen, als Farben in ihm enthalten sind, von denen jeder eine seiner Wellenlänge entsprechende verschiedene Richtung annimmt; es mögen Ap und Aq die äussersten von diesen farbigen Lichtstrahlen bezeichnen. Nach dem Austritte dieser verschiedenfarbigen Lichtstrahlen aus der Platte nehmen sie wieder lauter Richtungen pp', qq' an, die mit der AP parallel laufen, weil diess die Richtung eines jeden von ihnen vor seinem Eintritt in die Platte war. — Stellen P''A und Q''A homogene Lichtstrahlen von einerlei Wellenlänge vor, die im Innern der Krystallplatte bezüglich die Richtungen Ap und Aq (dieselben, welche so eben von den äussersten farbigen Strahlen eingenommen worden sind,) einhalten, so treten diese in Richtungen pp'', qq'' aus der Platte, die denen AP'' und AQ'', unter welchen sie einfielen, parallel laufen; und denkt man sich so viele solcher homogener Strahlen, als farbige sind, die mit diesen in gleicher Richtung durch die Platte gehen, so werden diese an Stellen, die zwischen p und q liegen, aus der Platte hervortreten, und mit divergirenden Richtungen in der Luft sich weiter fortpflanzen. — Denselben farbigen Bestandtheil Aq, welcher sich aus dem Strahle AP abgesondert hat, und der an der Stelle q aus der Platte hervortritt, schickt aber auch an die Stelle p in der mit Aq parallelen Richtung A'p ein mit AP paralleler Lichtstrahl A'P', wenn dieser mit dem AP einerlei Zusammensetzungweise hat, und ähnlich werden alle übrigen zwischen Ap und Aq liegenden farbigen Strahlen, welche aus dem zusammengesetzten Strahle AP sich abgesondert haben, an der Stelle p durch die Bestandtheile

von andern zwischen AP und A'P' liegenden zusammengesetzten Lichtstrahlen ersetzt werden, die dann sämmtlich aus der Stelle p in einer und derselben Richtung hervortreten und so einen einzigen zusammengesetzten Lichtstrahl bilden, der wieder ganz die Natur des auf die Platte gefallenen AP in sich trägt. Man sieht hieraus, dass sämmtliche farbige Lichtstrahlen wieder in der gleichen Zusammensetzungsweise unter sich zu einem Strahl vereinigt aus der Platte hervortreten, wie sie auf dieselbe eingefallen waren. — Die homogenen Lichtstrahlen AP'' und AQ'', welche die Platte in den gleichen Richtungen Ap und Aq wie die äussersten farbigen Bestandtheile des zusammengesetzten Lichtstrahles durchdringen, und nach ihrem Austritt aus der Platte in mit AP'' und AQ'' parallelen Richtungen pp'' und qq'' sich weiter fortpflanzen, können nicht gleichzeitig in das bei o befindliche Auge eingehen, weil ihre Richtungen sie stets weiter auseinander treiben; es wird aber ein mit qq' paralleler Strahl or, der durch die Platte in einer mit Aq parallelen Richtung A''r gedrungen ist, und von einem mit AQ'' parallelen Lichtstrahle herrührt, der homogen wie der AQ'' ist und einerlei Wellenlänge mit diesem hat, gleichzeitig mit dem pp'' in's Auge gelangen, aber in einem gewissen Abstände von ihm zu liegen scheinen. Eben so wird von allen zwischen r und p liegenden Stellen homogenes Licht in's Auge treten, das in Richtungen, die zwischen AP'' und AQ'' liegen, auf die Platte gefallen ist an Stellen zwischen A' und A''. — *Während also die farbigen Bestandtheile von verschiedenen parallelen und neben einander auf die Platte fallenden zusammengesetzten Lichtstrahlen, wieder unter sich zu einem Strahle vereinigt, die Platte verlassen, tritt homogenes Licht, das die Platte in denselben Richtungen wie die farbigen Bestandtheile durchdringt, und dann nothwendigerweise schon unter verschiedenen Richtungen aufgefallen seyn muss, fächerartig in das Auge ein.*

Dieses wohl verstanden ist es nun leicht das Verhalten des eine

Krystallplatte durchziehenden zusammengesetzten Lichtes in seinen Hauptzügen zu beurtheilen, wenn man bedenkt, dass jeder in einer bestimmten Richtung durch eine Krystallplatte gehende Lichtstrahl vermöge der doppeltbrechenden Wirkung des Krystalls in zwei andere, einen gewöhnlichen und einen aussergewöhnlichen, zerlegt wird, die einen, mittelst der Gleichung (1. a) zu bestimmenden Phasenunterschied $\frac{T}{v}A$ annehmen, wobei es gleichgültig ist, ob die Aenderungen in den Phasenunterschieden aus einer Aenderung von v oder von A herrühren, d. h. ob sie dadurch entstehen, dass immer ein anderes einfaches Licht unter dem gleichen Winkel auf die Platte fällt, oder dass stets dasselbe einfache Licht unter verschiedenen Richtungen in die Platte dringt. Denn denselben Werth, welchen $\frac{T}{v}A$ zufolge einer Aenderung von v , d. h. bei einem andern homogenen Lichte einnimmt, kann $\frac{T}{v}A$ auch bei gleichbleibenden v in Folge eines entsprechend abgeänderten Werthes von A annehmen; die Grösse A aber ändert sich in Gemässheit der Gleichung (1. b) blos mit der Richtung des einfallenden Lichtes in einer und derselben Platte ab. Aus dem Phasenunterschied aber lässt sich nach Anleitung der Gleichung (6. b) in Ziffer VIII. oder der in Ziffer IX. gegebenen Näherungsgleichung (4. a und c) die Lichtstärke finden, womit der fragliche Lichtstrahl das hintere Polarisationsmittel verlässt. Den bisherigen Erörterungen gemäss treten demnach die verschiedenfarbigen Bestandtheile eines aus der Platte kommenden zusammengesetzten Lichtstrahles mit ungleicher Stärke in's Auge, weil sie die Krystallplatte in ungleichen Richtungen durchziehen, aber doch stets mit derselben relativen Lichtstärke, wie homogenes Licht, das mit ihnen in einerlei Richtung durch die Krystallplatte sich hindurch bewegt. *Die verschiedenfarbigen Bestandtheile eines einzigen zusammengesetzten Lichtstrahles kommen folglich mit denselben relativen Lichtstärken in's Auge, wie die neben einander liegenden Strahlen eines homogenen Lichtes, das die Platte bezüglich in denselben Richtungen durchdringt, oder mit andern Worten,*

deren gewöhnliche und aussergewöhnliche Hälften in beiden Fällen den gleichen Phasenunterschied erlangt haben.

Kehren wir nun an der Hand der beiden eben mitgetheilten, mit gesperrter Schrift gedruckten Sätze wieder zu den Gleichungen (2. a) und zu dem ihnen angehängten Beispiele (2. b) zurück, so zeigt in diesem der Unterschied 10,67 zwischen den Werthen von $a + \eta$ für die beiden äussersten farbigen Bestandtheile an, dass die Lichtstärke in sämtlichen zu einem Strahle vereinigten farbigen Bestandtheilen je nach ihrer Brechbarkeit in der gleichen Weise wechselt, wie die eines homogenen über $\frac{T}{v} A$ (in unsern Beispiele 10,67) Bänder ausgebreiteten Lichts in der aus ihm hervorgehenden Interferenzfigur. Weil aber die Helligkeit einer einzigen Stelle in jeglichem Bande, der Gleichung (4. a) in Ziffer IX. gemäss, ausgedrückt wird durch:

$$A^2 = a^2 [\cos^2 A - \sin. 2\omega_1 \sin. 2\omega_2 \sin^2 \pi\eta]$$

und diese Formel sich blos mit den zu verschiedenen Stellen gehörigen Werthen von η ändert, so erhält man die dem ganzen Bande zugehörige mittlere Helligkeit, wenn man vorstehenden Ausdruck nach η integriert und das Integral von $\eta = 0$ bis $\eta = 1$ nimmt. So findet man für diese mittlere Helligkeit den Ausdruck:

$$a^2 [\cos^2 A - \frac{1}{2} \sin. 2\omega_1 \sin. 2\omega_2],$$

und dieser zeigt, dass die mittlere Helligkeit in allen Bändern stets die gleiche ist und im Verhältniss zu der des auffallenden Lichtes steht. Hätte der Unterschied in den extremen Werthen von $a + \eta$ genau 11 ganze Einheiten betragen und man denkt sich sämtliche farbige Lichtstrahlen nach dem Grade ihrer Brechbarkeit in elf gleiche Fächer abgetheilt, so würde sonach jedes Fach mit einer mittlern, dem Antheile dieser farbigen Strahlen im ankommenden Lichte proportionalen Stärke auf das ihm zugewandte Auge einwirken, und die Summe aller dieser aus den elf Fächern herkommenden Wirkungen, deren Stärke immer im

Verhältniss zu der in jedem einzelnen Fach vorkommenden Lichtart und zu der Menge steht, in welcher diese Lichtart in dem zur Platte gelangendem Lichte enthalten ist, muss daher nothwendigerweise einen Gesamteindruck im Auge hervorrufen, der fühlbar der gleiche ist, wie der von dem ohne Dazwischenkunft der Platte und der beiden Polarisationsmittel, in's Auge gelangendem Lichte, vorausgesetzt, dass die Art und Menge der farbigen Bestandtheile in dem zusammengesetzten Lichte sich von einem zum andern nur stetig ändert und die Zahl der aus den Gleichungen (2. a) hervorgehenden Ganzen gross genug ist, dass in jedes der einzelnen Fächer nur Strahlen von nahehin der gleichen Wirkungsweise fallen. Betrüge aber der genannte Unterschied nicht gerade 11 Ganze, sondern wie in unserm Beispiele $10\frac{2}{3}$, so erstreckten sich die letzten Farben nicht mehr über die Breite eines ganzen Bandes, sondern nur über zwei Drittheile davon, und dann werden sie im Allgemeinen nicht genau den constanten mittlern Eindruck eines ganzen Bandes hergeben, jedoch auch nicht einen davon beträchtlich verschiedenen, so dass immer noch der Gesamteindruck nahehin derselbe seyn wird wie zuvor, insbesondere an Stellen, wo die in $a + \eta$ enthaltenen Ganzen in grosser Anzahl vorhanden sind, weil dann der Ueberschuss der farbigen Wirkung von einer verhältnissmässig sehr kleinen Anzahl Strahlen in dem vielen zusammengesetzten Lichte ganz verloren geht. Die Sicherheit obiger Schlüsse wächst mit der Anzahl der in jenem Unterschiede enthaltenen Ganzen, weil dann in jedem einzelnen Fache nur wenig von einander verschiedene Farben vorkommen; dagegen verlieren obige Schlüsse alle ihre Bündigkeit in dem Falle, wo in jenem Unterschiede kein oder nur ein paar Ganze enthalten sind, weil dann die verschiedenen Farbengattungen in ganz andern Verhältnissen in's Auge gelangen, als sie im ankommenden Lichte hatten, und desshalb das aus dem Polarisationsapparate kommende Licht eine ganz andere Empfindung im Auge verursachen kann, als das Licht ohne diesen Apparat gethan haben würde. Im Vorstehenden ist allerdings eine blosser Schätzung des

sinnlichen Eindrucks der Erscheinung, wie sie aus zusammengesetztem Lichte hervorgeht, enthalten, allein wir haben diese Darstellung einer eigentlichen Berechnung vorgezogen, weil diese doch immer auch eine Annahme in Betreff der Art und Menge der im zusammengesetzten Lichte enthaltenen farbigen Bestandtheile machen müsste, und die Angel, um welche sich der ganze Hergang dreht, schon so deutlich genug in die Augen springt.

Die Beimischung von vielem Weisslichte zu verhältnissmässig nur sehr wenigen farbigen Strahlen gibt den Grund her, warum im Tageslichte entweder gar keine oder doch nur wenige Interferenzstreifen sich an den in unserm Apparate liegenden Krystallplatten sehen lassen. Es ist eine allgemein bekannte Erfahrung, wie sehr der Hinzutritt von Weisslicht zu Farben diese erbleichen macht, und wir selber werden später noch Versuche dieser Art zur Sprache bringen. Es scheint sogar, als ob verschiedene Farben die Eigenschaft im Weisslicht zu erbleichen in verschiedenem Grade besässen, und dann dürfte hierin der Grund aufzusuchen seyn, warum in den entlegensten Streifen der Interferenzfiguren bei Versuchen im Tageslicht das Grün und Carminroth immer die vorherrschenden Farben sind. Man kann aus den Versuchen selber ein angenähertes Mass für die Menge von Weisslicht herholen, das einer Farbe beigemischt werden muss, um diese zum gänzlichen Verschwinden zu bringen. In den gewöhnlichen Interferenzversuchen mit nicht polarisirtem Lichte, wie sie die Fresnel'schen Spiegel, oder die von mir gebrauchten Spiegelglasstücke geben, findet man neben dem mittlern ungefärbten Streifen auf jeder Seite selten mehr als noch sechs gefärbte Streifen, und diess würde zu erkennen geben, dass eine zwölffache Menge von Weisslicht die aus der einfachen Menge hervorgezogenen Farben zum Verschwinden bringt, indem nämlich schon die Hälfte eines Bandes zur mittlern Helligkeit des ganzen Bandes führt und man deswegen bei diesen Betrachtungen bloss halbe Interferenzbänder in's Auge

zu fassen berechtigt ist. *) In recht reinen Platten von Bergkrystall aber lassen sich ohne grosse Mühe noch Spuren von einem zehnten und elften Streifen entdecken, und aus dieser Wahrnehmung dürfte eine genauere Zahlenbestimmung für das Verschwinden der Farbe im Weisslicht herzunehmen seyn; sie würde 22 Theile Weisslicht zum gänzlichen Verlöschen der aus einem Theile hervorgehenden Farben fordern. Alles diess sind zwar immer nur angenäherte Bestimmungen, allein es vereinigen sich nichts destoweniger alle Thatsachen dieser Art zu dem sichern Schlusse, dass sich unsere Interferenzfiguren im gewöhnlichen Tageslichte nur in seltenen Fällen sehen lassen können und auch dann nur mit einer beschränkten Anzahl von Streifen. Die gegebenen Erläuterungen decken die Ursache auf, warum zum Gelingen von Interferenzversuchen in Krystallplatten in der Regel die Anwendung einer Flamme von, mit Kochsalz versetzten Weingeist erforderlich ist, dessen gelbes Licht lauter Lichtwellen von nicht sehr verschiedener Länge in sich schliesst.

Es gibt indessen Krystallplatten, die selbst im Tageslichte stets Interferenzfiguren sehen lassen; diess sind solche, deren Oberflächen senk-

*) Der Phasenunterschied bestimmt sich zwar hier in anderer Weise als bei Krystallplatten, allein die Folgerungen in Bezug auf Vernichtung der Farben bleiben doch in der Hauptsache die gleichen, wesshalb wir keinen Anstand nehmen, diese Interferenzerscheinungen mit denen in Krystallplatten in fraglicher Beziehung auf einerlei Linie zu stellen. In beiden Fällen hängt das Verschwinden der Streifen von der Vermischung der einfachen Lichter nahe in denselben Verhältnissen wie im zusammengesetzten ab, eine Bedingung, die weder hier noch dort mit Stillschweigen übergangen werden darf, da wo eine wirkliche Erklärung des Verschwindens der Streifen gegeben werden soll. In beiden Fällen hängt das Ergebniss nahe in der gleichen Weise von der Richtung des Lichtes und seiner Geschwindigkeit ab.

recht zur optischen Axe stehen. In diesem hat man $a = 0$ und in Folge dessen $m = v'$ zu setzen, wesshalb bei ihnen die allgemeine Curven-gleichung sich verwandelt in:

$$a + \eta = \frac{1}{2} T \frac{v'^2 - v''^2}{v^2 v'} \sin^2 i,$$

auf deren rechter Seite nur das eine Glied vorkommt, welches $\sin^2 i$ zum Factor hat, und das eben desswegen bei kleinen Werthen von i , d. h. nahe bei der Mitte des Gesichtsfeldes, für $a + \eta$ nur sehr kleine Werthe gibt. Eine Folge hiervon ist, dass die extremen Werthe von $a + \eta$ in Bezug auf die äussersten farbigen Bestandtheile des auffallenden Weisslichtes nicht weit von der Mitte des Gesichtsfeldes in sehr enge Grenzen eingeschlossen sind, und darum dort ein farbiges Resultat zu liefern ganz geeignet sind. Dem zur Folge zeigen sich in solchen Platten farbige Bänder in beschränkter Anzahl und nur bis zu einer gewissen Entfernung von der Mitte des Gesichtsfeldes hin, und alles hier Gesagte gilt wiewohl mit einiger Beschränkung auch noch, so lange die Oberflächen nicht weit von der senkrechten Lage zur optischen Axe abweichen. — Man kann sich leicht aus den Eingangs dieser Ziffer aufgestellten Gleichungen überzeugen, dass bei senkrechten Platten weder mitten im Gesichtsfelde, noch in beträchtlicher Entfernung davon, sondern nur in einem bestimmten Abstände von dieser Mitte der grösste Farbenglanz in Verbindung mit der grössten Mannigfaltigkeit der Farben zu finden sei, was wir jedoch als Nebensache hier auf der Seite liegen lassen müssen.

Ende der ersten Hälfte.

Berichtigung. Seite 55 und 56 ist das sonst als Differentialzeichen gebrauchte d im Sinne eines Ableitungszeichen zu nehmen und auf dieser letztern Seite (Zeile 1.) sind die über den Buchstaben ψ stehenden 1 als Accente aufzufassen, Seite 58, Zeile 18 lese man ψ für φ .

Seite 75, Zeile 3 v. u. v' und v'' für v' und v''^2 .

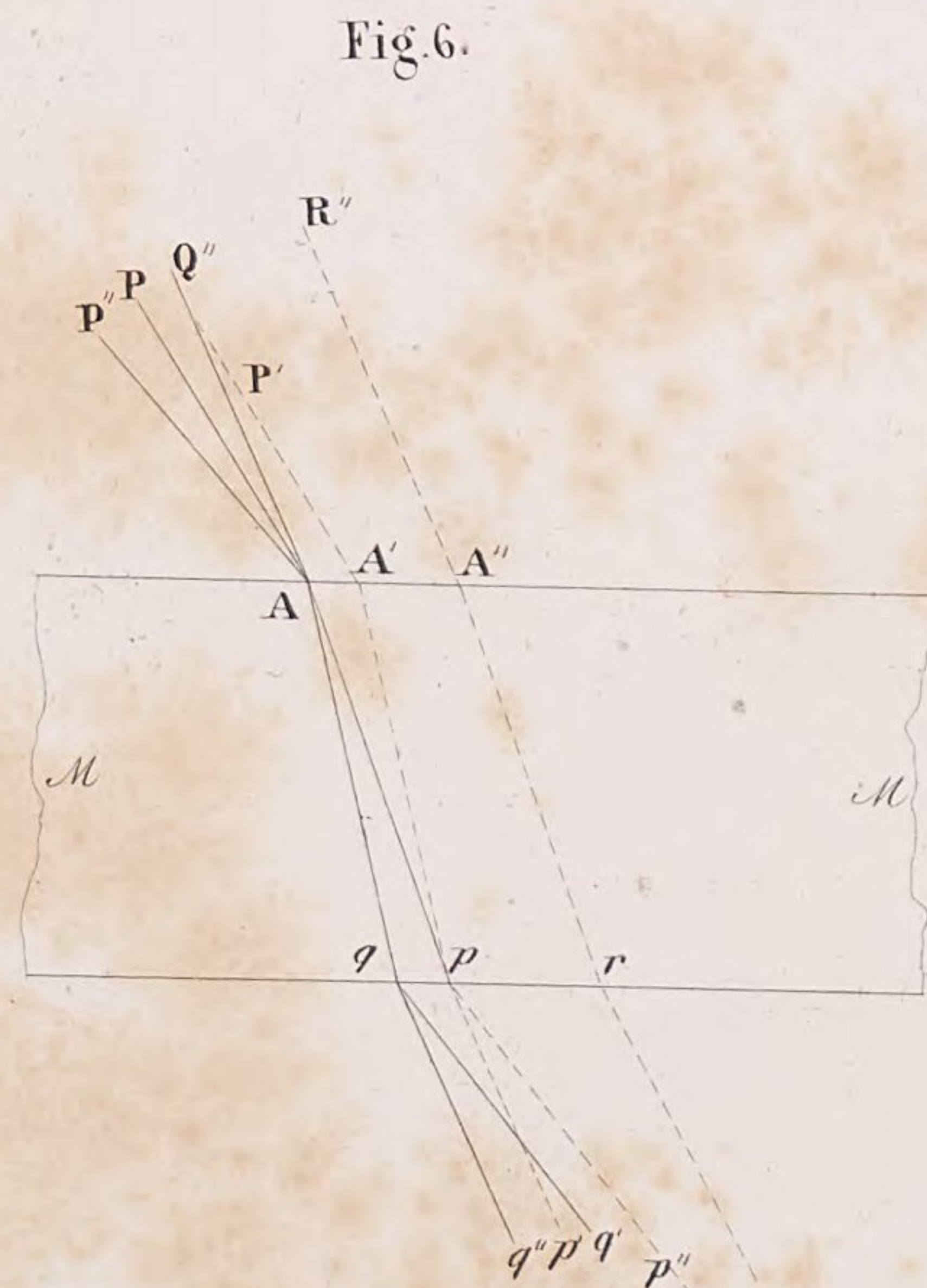
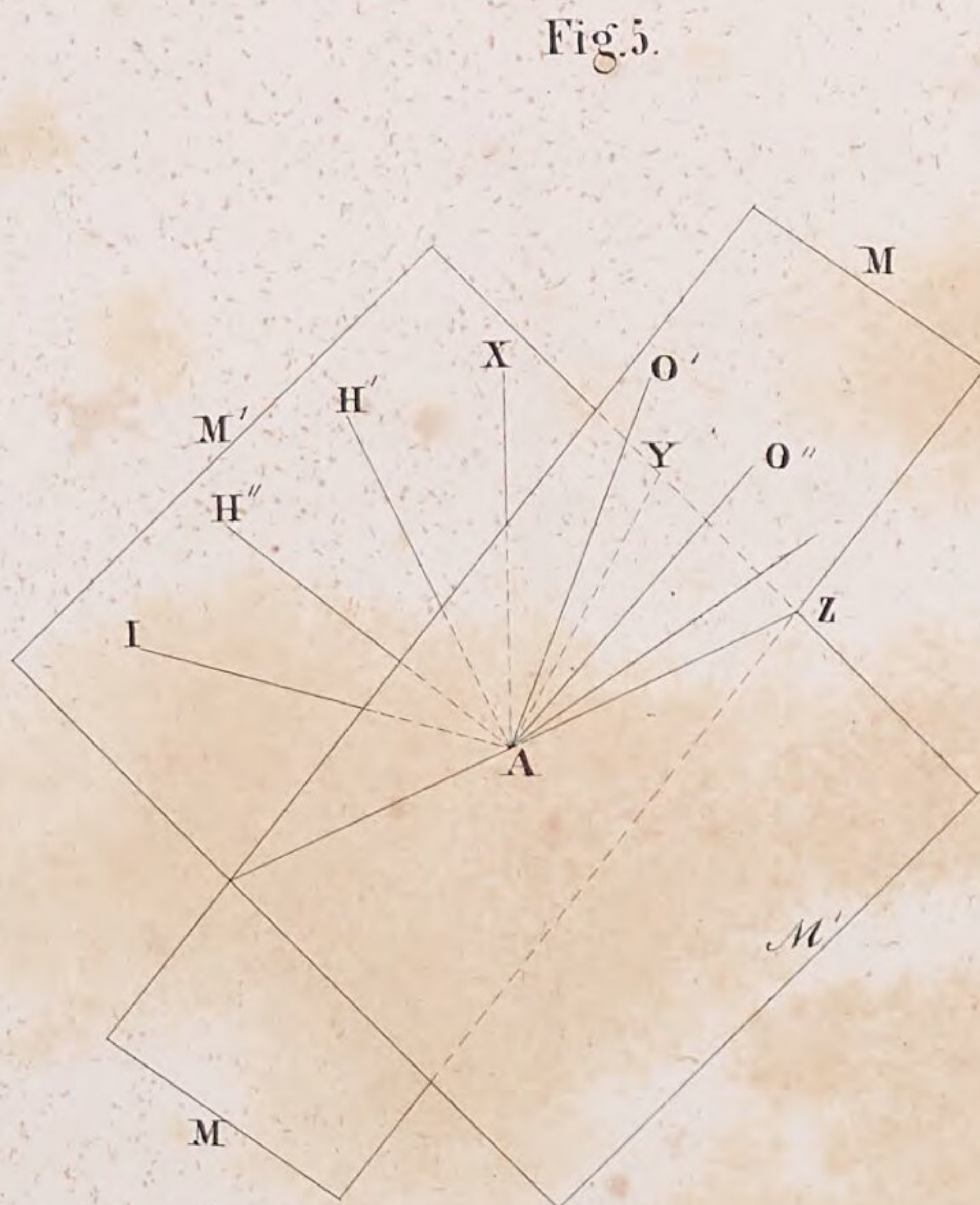
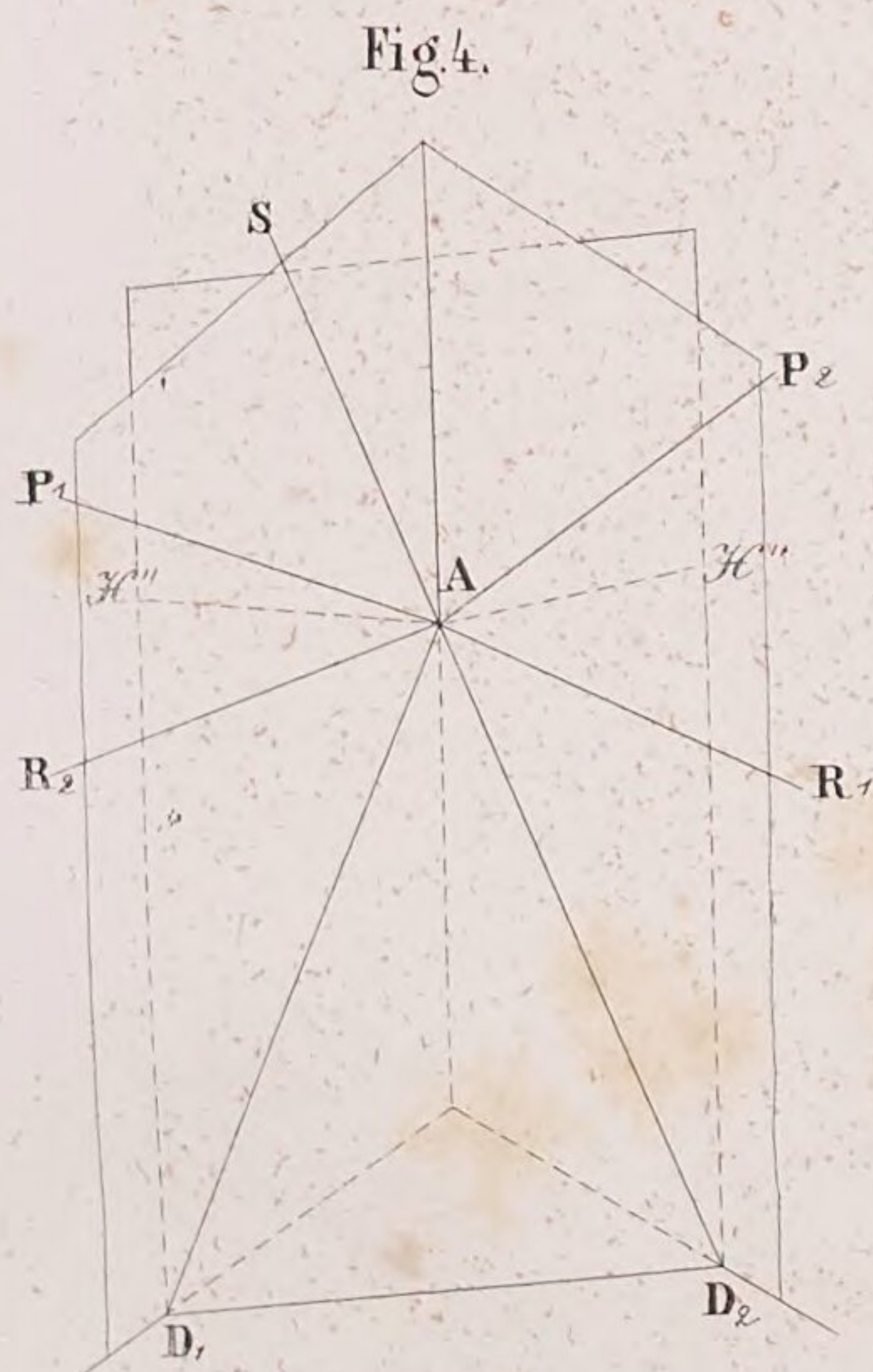
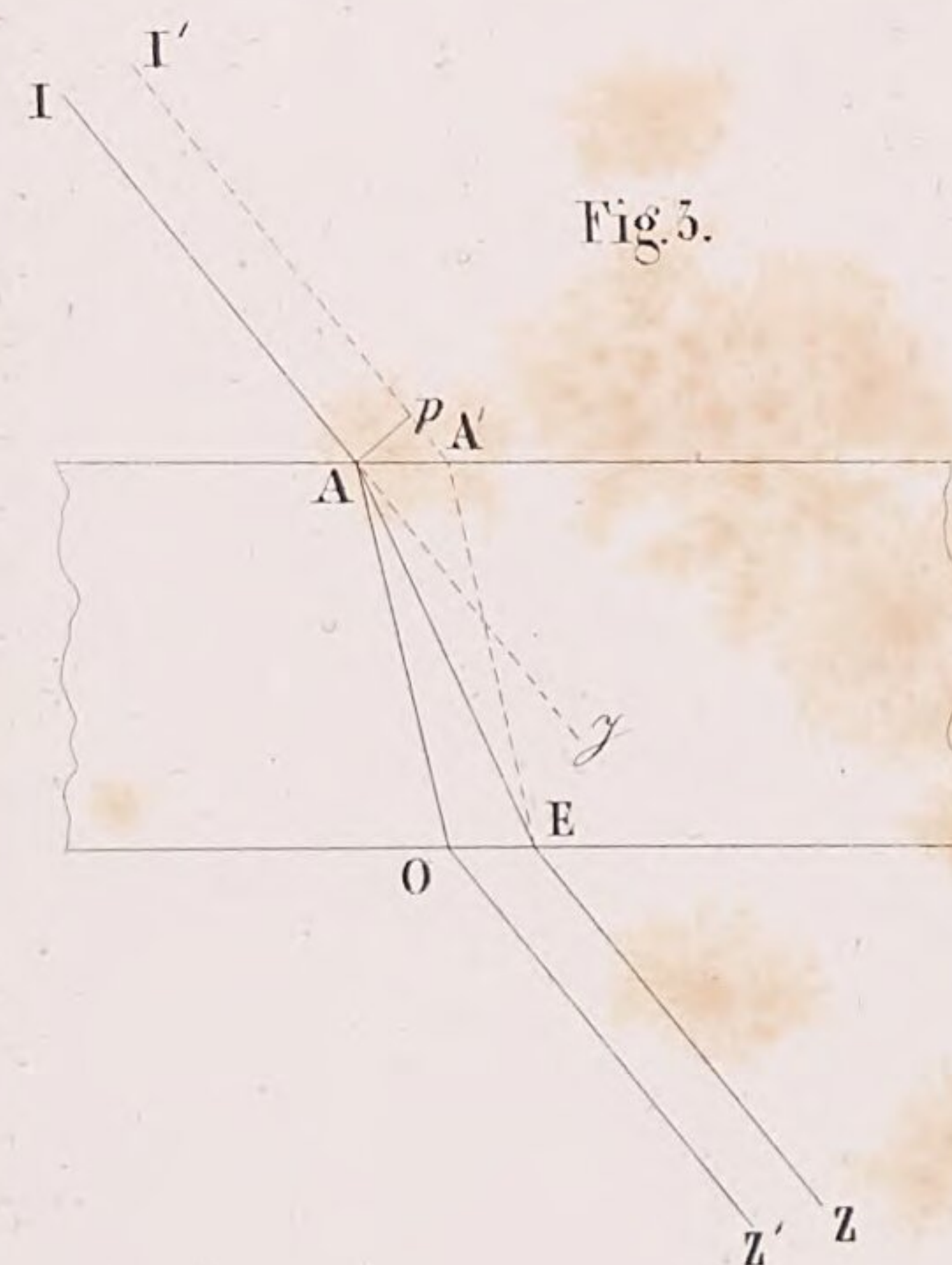
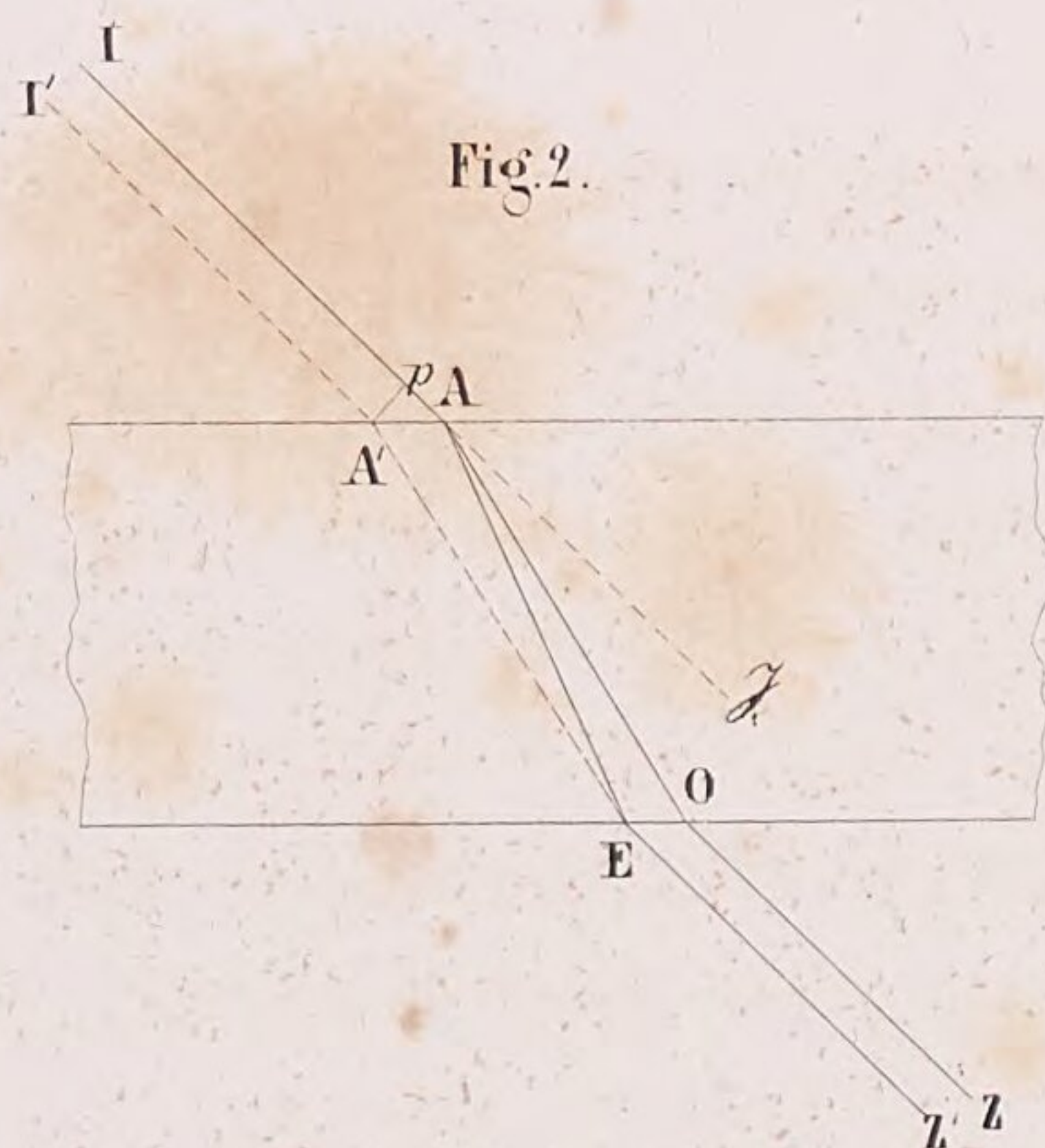
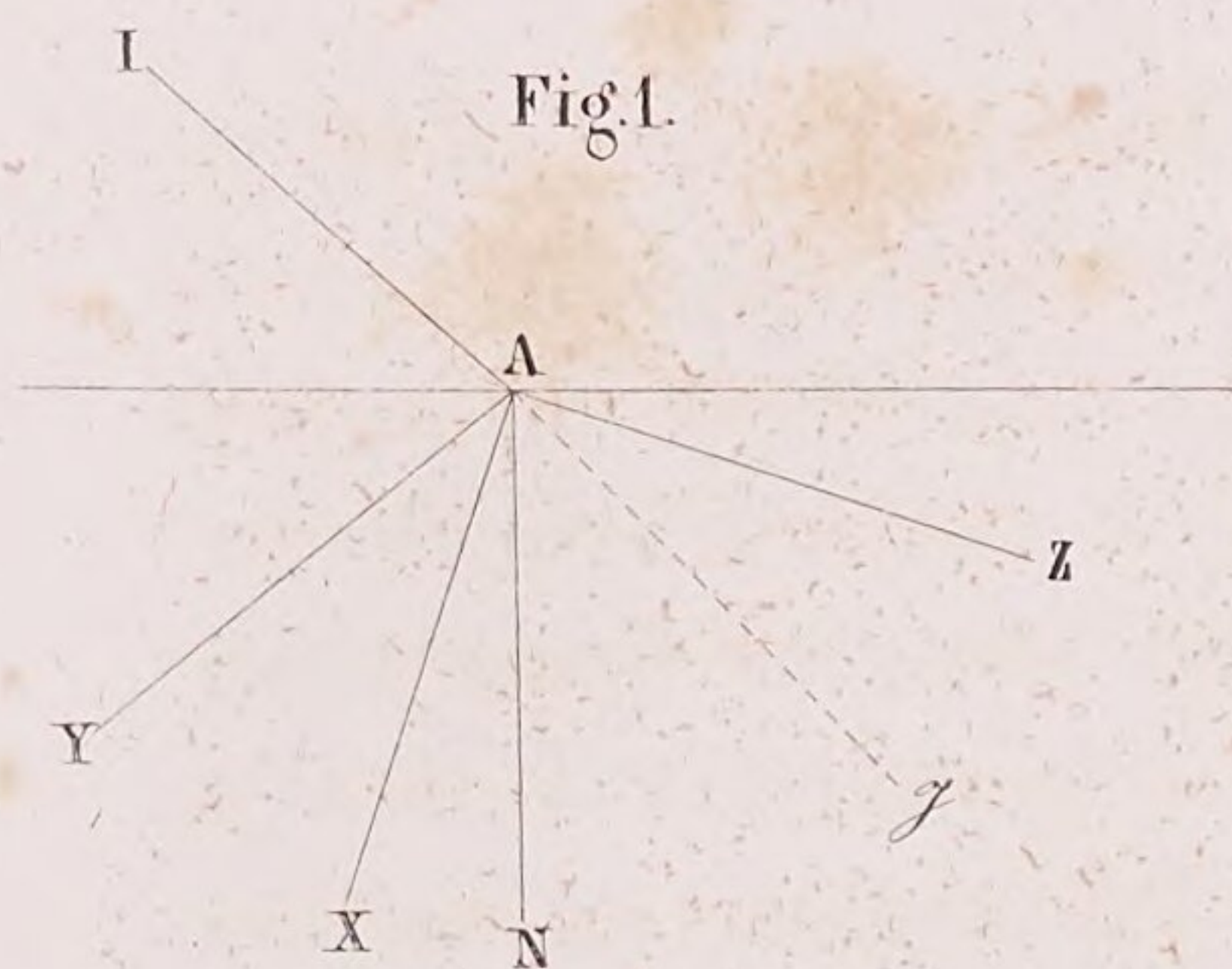


Fig.7.

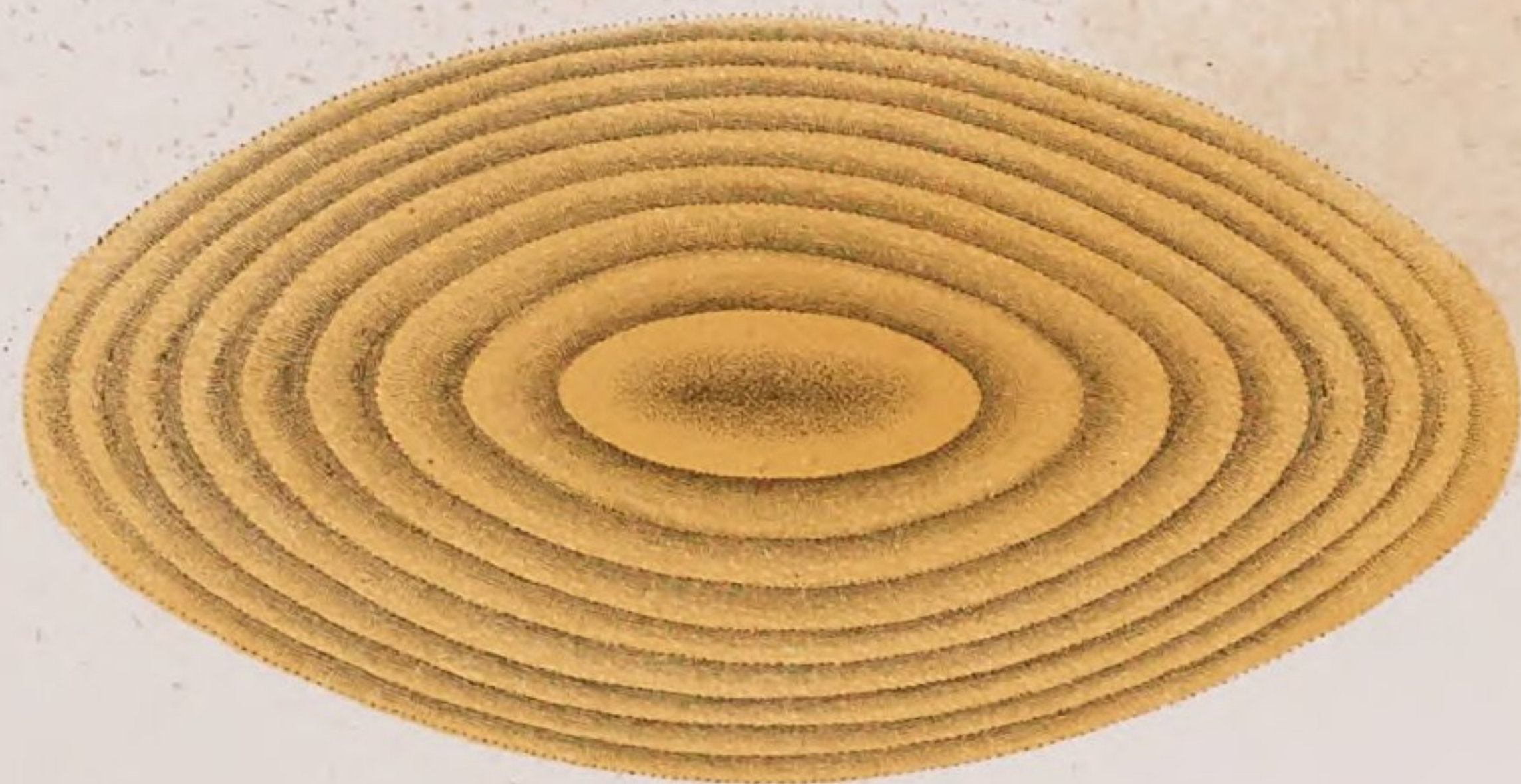
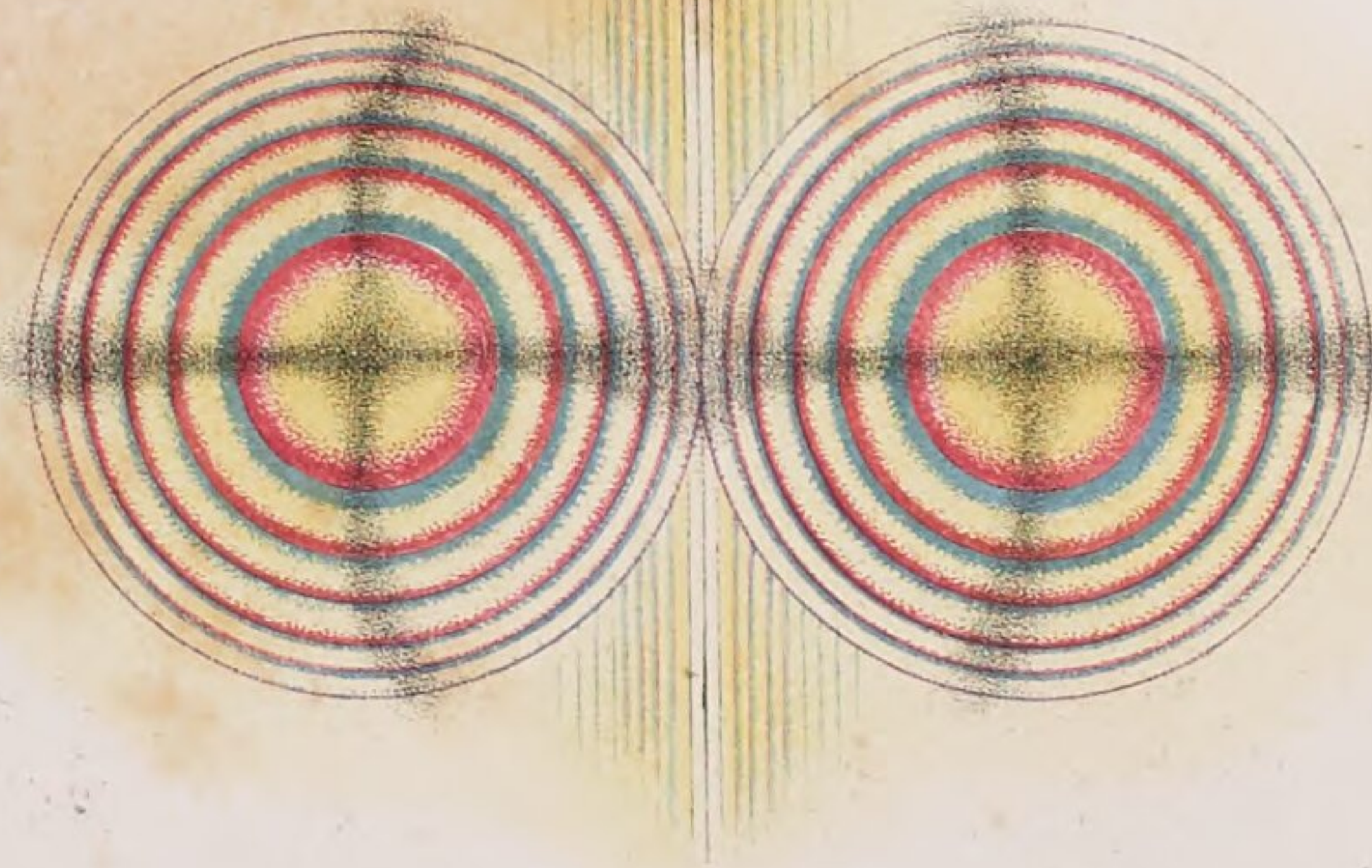


Fig.8.



recht zur optischen Axe stehen. In diesem hat man $\alpha = 0$ und in Folge dessen $m = v$ zu setzen, wesshalb bei ihnen die allgemeine Curven-Gleichung sich verwandelt in:

$$a + y = \frac{1}{2} T \frac{1 - \sin^2 \alpha}{1 + \sin^2 \alpha} \sin^2 \alpha$$

auf deren rechter Seite nur das eine Glied vorkommt, welches $\sin^2 \alpha$ zum Factor hat, und das eben deswegen bei kleinen Werten von α d. h. nahe bei der Mitte des Gesichtsfeldes, für $\alpha + y$ nur sehr kleine Werte gibt. Eine Folge hiervon ist, dass die ersten Werte von $\alpha + y$ in Bezug auf die äussersten farbigen Bestandtheile des auffallenden Weisslichtes nicht weit von der Mitte des Gesichtsfeldes in sehr enge Grenzen eingeschlossen sind, und darum dort ein farbiges Resultat zu liefern ganz geeignet sind. Dem zur Folge zeigen sich in solchen Platten farbige Bänder in beschränkter Anzahl und nur bis zu einer gewissen Entfernung von der Mitte des Gesichtsfeldes hin, und alles hier Gesagte gilt namentlich mit einiger Beschränkung auch noch, so lange die Oberflächen nicht weit von der senkrechten Lage zur optischen Axe abweichen. — Man kann sich leicht aus den Eingangs dieser Ziffer aufgestellten Gleichungen überzeugen, dass bei senkrechten Platten weder mitten im Gesichtsfelde, noch in beträchtlicher Entfernung davon, sondern nur in einem bestimmten Abstände von dieser Mitte der grösste Farbenglanz in Verbindung mit der grössten Mannigfaltigkeit der Farben zu finden sei, was wir jedoch als Nebensache hier auf der Seite liegen lassen müssen.

Ende der ersten Hälfte.

Bezeichnung. Seite 55 und 56 ist das sonst als Differentialquotient bezeichnete d im Sinne eines Ableitungszeichens zu nehmen und auf dieser letzten Seite (Seite 57) sind die über den Buchstaben α stehenden 1 als Arcus zu verstehen. Seite 58, Zeile 18 lese man α für α .
Seite 57, Zeile 3 v. u. und 4 v. u. für α und α .

Ohm, Georg Simon, 1789-1854

Erklärung aller in einaxigen Krystallplatten zwischen geradlinig
polarisiertem Lichte wahrnehmbaren Interferenz-Erscheinungen in
mathematischer Form mitgetheilt
Bd.: 1

München 1853

Bamberg, Staatsbibliothek -- Csl.q.39-e(7#3
urn:nbn:de:bvb:12-bsb11441914-7